

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Съ приложеніемъ большого количества упражненій  
и статьи: главнѣйшіе методы рѣшенія геометриче-  
скихъ задачъ на построеніе.

СОСТАВИТЕЛЬ

**А. Висселевъ.**

Цена 1 р. 25 к.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА  
В. В. ДУМНОВА  
КОДЪ «ПЕРСКОЕ»  
„НАСЛѢДНИКИ БРАТЯВЪ САМСОВЪ.“

МОСКВА.

Типо-Лит. Лашковичъ, Знаменскій и К°. Чистые пруды, д. № 199.  
1892.

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Съ приложеніемъ большого количества упражненій  
и статьи: главнѣйшіе методы рѣшенія геометриче-  
скихъ задачъ на построеніе.

СОСТАВИЛЪ

**А. Киселевъ.**

**Цѣна 1 р. 25 к.**

ИЗДАНИЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА  
В. В. ДУМНОВА  
ПОДЪ ФИРМОЮ  
„НАСЛѢДНИКИ БРАТЪЕВЪ САЛАЕВЫХЪ.“

МОСКВА.

Типо-Лит. Лашкевичъ, Знаменскій и К<sup>о</sup>, Чистые пруды, д. № 199.

1892.

## ПРЕДИСЛОВІЕ.

---

Главнѣйшія особенности предлагаемаго руководства геометріи состоятъ въ слѣдующемъ:

1. Въ большинствѣ нашихъ учебниковъ геометріи понятіе о длинѣ окружности и вообще кривой линіи принимается за элементарное, не требующее никакихъ оговорокъ и разъясненій, и выводъ, что длина окружности есть предѣлъ периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ основывается на скрытомъ допущеніи или на не строго доказываемой теоремѣ, что объемлющая линія длинѣе объемлемой. Въ предлагаемомъ руководствѣ, въ согласіи со многими авторитетами учебно-математической литературы, проведено иное воззрѣніе, которымъ признается, что понятіе о длинѣ элементарно только въ примѣненіи къ прямой; но когда рѣчь идетъ о сравненіи конечной кривой съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ, тогда (вслѣдствіе несовмѣстимости элементовъ кривой съ элементами прямой) понятіе о длинѣ становится сложнымъ и требуетъ опредѣленія.\*) Сообразно этому взгляду мы не доказываемъ, а принимаемъ за **опредѣленіе**, что длиною конечной кривой называется предѣлъ периметра вписанной ломаной линіи, когда стороны ея стремятся къ нулю. Конечно, въ среднихъ классахъ учебныхъ заведеній было бы затруднительно вполне обосновать это опредѣленіе, т. е. доказать, что такой предѣлъ существуетъ и что онъ не зависитъ отъ закона вписыванія ломаной линіи; но въ педагогическомъ отношеніи, какъ намъ кажется, нѣкоторые пробѣлы въ доказательствѣ (не скрываемые, впрочемъ, отъ учащихся) не имѣютъ такого вреднаго значенія, какъ неопредѣленность, неясность и сбивчивость въ понятіяхъ, а тѣмъ болѣе въ основныхъ. При повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ (особенно въ реальныхъ училищахъ, гдѣ

---

\*) Отсылаемъ интересующихся этимъ вопросомъ къ статьѣ *М. Поппу-жемо* „О длинѣ“, помѣщенной въ „Вѣстникъ оп. физики и элем. математики“, (1891 г., № № 122 и 123).

равны ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью. Принявъ это предложеніе за опредѣленіе равенства, мы не нуждаемся болѣе въ косвенномъ и тяжеломъ доказательствѣ отъ противнаго; его всегда можно замѣнить прямымъ доказательствомъ, и болѣе простымъ, и болѣе яснымъ.

5. Нѣкоторыя статьи изложены въ прилагаемомъ руководствѣ, какъ кажется, проще, чѣмъ въ распространенныхъ нашихъ учебникахъ. Таковы, напр., статьи: о параллельныхъ прямыхъ, объ относительномъ проложеніи окружностей, о пропорціональныхъ линіяхъ, о правильныхъ многоугольникахъ, о нахожденіи объема всякаго параллелоипеда, о подобіи многогранниковъ и нѣкоторыя другія. Сравнительная простота достигается нѣкоторымъ измѣненіемъ въ распредѣленіи матеріала, а иногда упрощеніемъ приемовъ доказательства.

Кромѣ указанныхъ главнѣйшихъ особенностей читатель встрѣтитъ въ этой книгѣ и нѣкоторыя другія. Отступая мѣстами отъ обычнаго приема изложенія, мы стремились или упростить доказательства, или сократить количество запоминаемаго матеріала, или облегчить усвоеніе предмета во всей его цѣлости. Изложеніе нѣкоторыхъ теоремъ существенно измѣнено (напр., теорема Птоломея); теоремы, близкія другъ къ другу по ихъ логической связи или по общности доказательства, соединены въ одну группу. Нѣкоторыя обыкновенно помѣщаемыя въ руководствахъ теоремы отнесены нами къ упражненіямъ, или вынуждены совсѣмъ, какъ не имѣющія примѣненія въ логической цѣпи другихъ теоремъ и не представляющія самостоятельнаго интереса (напр., обратная теорема о вертикальныхъ углахъ, или случай равенства прямоугольныхъ треугольниковъ по катету и противолежащему острому углу). Съ цѣлью облегчить учащимся усвоеніе распредѣленія матеріала мы сочли полезнымъ вездѣ, гдѣ возможно, давать той или другой группѣ теоремъ соответствующій заголовокъ, указывающій на характеръ теоремъ этой группы.

Замѣтимъ еще, что относительно обратныхъ теоремъ, слѣдую нѣкоторымъ французскимъ учебникамъ, мы стремились провести идею— что «если въ теоремѣ или рядѣ теоремъ



разсмотрѣны всевозможные случаи, которые могутъ представиться относительно величины или расположенія нѣкоторыхъ частей фигуры, причемъ оказалось, что въ различныхъ случаяхъ получаются различные выводы относительно величины или расположенія другихъ частей фигуры, то можемъ утверждать à priori, что обратныя предложенія вѣрны». Освоившись съ этимъ логическимъ принципомъ, учащіеся во многихъ случаяхъ могутъ сами составлять и доказывать обратныя предложенія безъ помощи учителя и учебника.

Книга снабжена значительнымъ количествомъ упражненій, состоящихъ частью изъ нѣкоторыхъ не вошедшихъ въ текстъ, но представляющихъ интересъ теоремъ, а главнымъ образомъ изъ задачъ на построеніе и вычисленіе. Въ концѣ планиметріи мы помѣстили\*) нѣкоторыя задачи на вычисленіе изъ «Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметріи» г. М. Попруженко (Воронежъ, 1891 г.). Эти задачи обладаютъ прежде всего тѣмъ достоинствомъ, что онѣ содержатъ много чисто геометрическаго матеріалу, а не представляютъ собою только арифметическихъ или алгебраическихъ упражненій съ геометрическими данными. Въ концѣ курса, въ видѣ дополненія, мы сочли не лишнимъ приложить небольшую статью о методахъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе съ примѣрами задачъ, рѣшаемыхъ этими методами. Существующіе у насъ сборники подобнаго рода, устрашая учащихся своимъ объемомъ, употребляются ими лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Мы изложили въ самомъ сжатомъ видѣ только главнѣйшіе методы и помѣстили наиболѣе типичныя задачи.

Слѣдуя учебнымъ планамъ гимназій и реальныхъ училищъ, мы помѣщаемъ основныя задачи на построеніе и вычисленіе въ самомъ текстѣ книги непосредственно послѣ тѣхъ теоремъ, на которыхъ основано ихъ рѣшеніе. Въ сокращенномъ видѣ мы указываемъ также сущность приложенія алгебры къ геометріи и построеніе простѣйшихъ алгебраическихъ формулъ.

Считаемъ не лишнимъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Съ

\*) съ согласія составителя.

точки зрѣнія строгой теоріи къ задачамъ на построеніе возможно приступить только тогда, когда ученики усвоили основныя предложенія объ окружности. Но съ педагогической точки зрѣнія это едва ли было бы удобно: отодвинуть практическія упражненія такъ далеко отъ начала курса значило бы сдѣлать начало геометріи, и безъ того трудное для начинающихъ, еще болѣе сухимъ и тяжелымъ. Мы поступились строгостью въ пользу практическаго интереса и помѣстили основныя задачи на построеніе тотчасъ послѣ рассмотрѣнія свойствъ треугольниковъ.

Книга напечатана двумя шрифтами: въ обыкновенномъ изложено все то, что должно быть пройдено въ среднихъ классахъ, въ мелкомъ — то, что желательно дополнить при повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ. Не желая расширять объема учебника, мы не помѣстили въ немъ ничего такого, что не входило бы въ программы или гимназій, или реальныхъ училищъ.

При составленіи этого руководства мы пользовались, какъ пособіемъ, кромѣ извѣстныхъ оригинальныхъ и переводныхъ учебниковъ на русскомъ языкѣ, еще слѣдующими сочиненіями

*Rouché et Comberousse* — *Éléments de géométrie* (quatrième ed., 1888);

Тѣхъ же авторовъ — *Traité de géométrie* (cinquième ed.);

*Vacquant* — *Cours de géométrie* (deuxième ed.);

*Bourget* — *Cours de géométrie* (Sixième ed.);

*Bacr* — *Éléments de géométrie plane* (1887);

*Tombeck* — *Traité de géométrie* (13-e ed., 1890);

*Compagnon* — *Éléments de géométrie* (seconde ed.);

*Houel* — *Essai critique sur les principes fondamentaux de géométrie élémentaire*;

*H. Schotten* — *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts* (1890);

*Rausenberger* (Otto) — *die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene* (1887);

и нѣкоторыми другими.

# ВВЕДЕНІЕ.

---

## Математическія предложенія.

**1.** Во всякой математической наукѣ могутъ встрѣтиться слѣдующія предложенія:

**Опредѣленія.** Такъ называютъ предложенія, въ которыхъ разъясняется, какой смыслъ придаютъ тому или другому названію. Наприм., въ ариметикѣ мы встрѣчаемъ опредѣленія наименьшаго кратнаго, общаго наибольшаго дѣлителя и т. п.

**Аксиомы.** Такъ называютъ истины, которыя, вслѣдствіе своей очевидности, принимаются безъ доказательства. Таковы, напр., предложенія:

Если двѣ величины равны порознь одной и той же третьей величинѣ, то онѣ равны и между собою.

Если къ равнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ равныхъ величинъ отнимемъ поровну, то равенство не нарушится.

Если къ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ неравныхъ величинъ отнимемъ поровну, то смыслъ неравенства не измѣнится, т.-е. бѣлая величина останется бѣлой.

**Теоремы.** Такъ называются предложенія, которыхъ истинность обнаруживается только послѣ нѣкотораго разсужденія (доказательства). Примѣромъ можетъ служить арифметическая истина: „если сумма цифръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9“.

**Слѣдствія.** Такъ наз. предложенія, которыя составляютъ непосредственный выводъ изъ аксиомы или теоремы. Напр., изъ теоремы: „въ геометрической пропорціи произведение край-

нихъ членовъ равно произведенію среднихъ“ выводится слѣдствие: „крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній“.

**2. Составъ теоремы.** Во всякой теоремѣ можно различить двѣ части: условіе и заключеніе. Условіе выражаетъ то, что предполагается даннымъ; заключеніе содержитъ въ себѣ то, что требуется доказать. Напр., въ теоремѣ: „если сумма цифръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9“, условіемъ служитъ первая часть теоремы: „если сумма цифръ дѣлится на 9“, а заключеніемъ — вторая часть: „то число дѣлится на 9;“ другими словами, намъ дано, что сумма цифръ дѣлится на 9, а требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и число дѣлится на 9.

Условіе и заключеніе теоремы могутъ иногда состоять изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ условій и заключеній; напр., въ теоремѣ: „если число дѣлится на 2 и на 3, то оно раздѣлится на 6“, условіе состоитъ изъ двухъ частей: если число дѣлится на 2 и если число дѣлится на 3.

Полезно замѣтить, что всякую теорему можно подробно выразить такъ, что ея условіе будетъ начинаться словомъ „если“, а заключеніе — словомъ „то“.

**3. Обратная теорема.** Теоремою, обратною данной теоремѣ, наз. такая, въ которой условіемъ поставлено заключеніе или часть заключенія данной теоремы, а заключеніемъ — условіе или часть условія данной теоремы. Напр., слѣдующія двѣ теоремы будутъ обратны другъ другу:

Если сумма цифръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9.		Если число дѣлится на 9, то сумма цифръ дѣлится на 9.
--	--	--

Если одну изъ этихъ теоремъ назовемъ *прямую*, то другую слѣдуетъ назвать *обратною*.

Въ этомъ примѣрѣ обѣ теоремы: и прямая, и обратная, оказываются вѣрными. Но не должно думать, что такъ бываетъ всегда. Напр., теорема: „если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на то же число“ — вѣрна, но невѣрно обратное предложеніе: „если сумма дѣлится на какое-нибудь число, то и каждое слагаемое раздѣлится на него“.

**4. Противоположная теорема.** Теоремою, противоположною данной теоремѣ, наз. такая, которой условіе и заключеніе представляютъ *отрицаніе* условія и заключенія данной теоремы. Напр., теоремѣ: „если сумма цифръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9“ соответствуетъ такая противоположная: „если сумма цифръ *не* дѣлится на 9, то число *не* дѣлится на 9“.

И здѣсь должно замѣтить, что вѣрность прямой теоремы еще не служить доказательствомъ вѣрности противоположной: напр., противоположное предложеніе: „если каждое слагаемое *не* дѣлится на одно и то же число, то и сумма *не* раздѣлится на это число“ — не вѣрно, тогда какъ прямое предложеніе вѣрно.

**5. Зависимость между теоремами: прямой, обратной и противоположной.** Для лучшаго уясненія этой зависимости выразимъ теоремы сокращенно такъ:

1°. *Прямая:* если есть  $A$ , то есть и  $B$ .

2°. *Обратная:* если есть  $B$ , то есть и  $A$ .

3°. *Противоположная прямой:* если нѣтъ  $A$ , то нѣтъ и  $B$ .

4°. *Противоположная обратной:* если нѣтъ  $B$ , то нѣтъ и  $A$ .

Разсматривая эти предложенія, легко замѣтимъ, что первое изъ нихъ находится въ такомъ же отношеніи къ четвертому, какъ второе къ третьему, а именно: предложенія первое и четвертое обратны одно въ другое, равно какъ второе и третье. Дѣйствительно, изъ предложенія: „если есть  $A$ , то есть и  $B$ “ непосредственно слѣдуетъ: „если нѣтъ  $B$ , то нѣтъ и  $A$ “ (такъ какъ, если бы  $A$  было, то, согласно первому предложенію, было бы и  $B$ ); обратно, изъ предложенія: „если нѣтъ  $B$ , то нѣтъ и  $A$ “ выводимъ: „если есть  $A$ , то есть и  $B$ “ (такъ какъ, если бы  $B$  не было, то не было бы и  $A$ ). Совершенно такъ же убѣдимся, что изъ второго предложенія слѣдуетъ третье, и наоборотъ.

Вслѣдствіе этого, для того, чтобы имѣть увѣренность въ справедливости всѣхъ четырехъ теоремъ, нѣтъ надобности доказывать каждую изъ нихъ отдѣльно, а достаточно ограничиться доказательствомъ только двухъ: прямой и обратной, или прямой и противоположной.

## Прямая линія, плоскость. Понятіе о геометріи.

**6. Геометрическія фигуры.** Часть пространства, занимаемая какимъ-нибудь предметомъ, называется *геометрическимъ тѣломъ*, или просто *тѣломъ*.

То, чѣмъ ограничено тѣло отъ остального пространства, называется *поверхностью*.

Граница, отдѣляющая одну часть поверхности отъ другой, называется *линіей*.

Граница, отдѣляющая одну часть линіи отъ другой, называется *точкой*.

Тѣло, поверхность, линія и точка не существуютъ въ природѣ раздѣльно. Однако, при помощи отвлеченія, мы можемъ разсматривать геометрическое тѣло независимо отъ матеріальнаго предмета, поверхность—независимо отъ тѣла, линію—независимо отъ поверхности и точку—независимо отъ линіи.

Совокупность какихъ бы то ни было точекъ, линій, поверхностей или тѣлъ, расположенныхъ извѣстнымъ образомъ въ пространствѣ, называется вообще *фигурой*.

**7. Геометрія.** Наука, разсматривающая свойства фигуръ, наз. *геометріей*, что въ переводѣ съ греческаго языка означаетъ *землемѣріе*. Такое названіе этой наукѣ дапо было потому, что въ древнее время главною цѣлью геометріи было измѣреніе разстояній на земной поверхности.

**8.** Въ самомъ началѣ геометріи должно быть указано слѣдующее общее свойство фигуръ:

**Аксиома пространства.** *Всякую фигуру можно перенести изъ одного мѣста пространства въ какое угодно другое, не нарушая ни величины составляющихъ фигуру частей, ни ихъ взаимнаго расположенія.*

**9. Прямая линія.** Всякій знаетъ, что такое *прямая линія*, или просто *прямая*, представленіе о которой намъ даетъ туго натянутая нить. Понятіе о прямой *элементарно*, т.-е. оно не можетъ быть опредѣлено посредствомъ другихъ болѣе простыхъ понятій.

Прямая линія обладаетъ слѣдующими основными свойствами:

**Аксиомы прямой.** 1°. *Черезъ всякія двѣ точки пространства можно провести прямую и притомъ только одну.*

2°. *Прямую можно продолжать безъ конца въ обѣ стороны отъ каждой ея точки.*

3°. Если две прямые имеют только одну общую точку, то они перескаются, т.-е. каждая из них расположена по обе стороны другой.

Из первой аксіомы непосредственно слѣдуетъ:

Две прямые, будучи наложены одна на другую такъ, что две точки одной прямой совпадаютъ съ двумя точками другой прямой, совпадаютъ и во всѣхъ остальныхъ точкахъ (потому что въ противномъ случаѣ черезъ две точки можно было бы провести две различныя прямые, что противорѣчитъ аксіомѣ первой).

По той же причинѣ две прямые могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.

На чертежѣ прямую изображаютъ въ видѣ тонкой черты, проведенной отъ руки или помощью линейки черезъ каки-нибудь две точки прямой.

**10. Прямая конечная и безконечная.** Если прямую представляютъ продолженною въ обѣ стороны безконечно, то ее называютъ *безконечною* или *неопредѣленною* прямой. Такую прямую обозначаютъ обыкновенно двумя буквами, поставленными у двухъ какихъ-нибудь ея точекъ. Такъ, говорятъ: „прямая  $AB$  или  $BA$ “ (черт. 1).

$A \text{ ————— } B$

Черт. 1

$C \text{ ————— } D$

Черт. 2

Часть прямой, ограниченная съ обѣихъ сторонъ, наз. *конечною* прямой, или *отрѣзкомъ* прямой; такая прямая обозначается двумя буквами, поставленными у концовъ ея (отрѣзокъ  $CD$ , черт. 2). Отрѣзокъ прямой, соединяющій две точки, наз. *расстояніемъ* между ними.

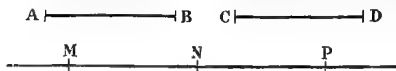
Иногда рассматриваютъ прямую, ограниченную только съ одной стороны, напр. въ точкѣ  $A$  (черт. 3). О такой прямой говорятъ, что она *исходитъ* изъ точки  $A$ .

$A \text{ ————— } \dots\dots\dots$

Черт. 3



**11. Равенство конечныхъ прямыхъ.** Два отрезка прямой считаются равными, если они при наложеніи совмѣщаются.



Черт. 4

Положимъ, напр., что мы накладываемъ отрезокъ  $AB$  на  $CD$  (черт. 4) такъ, чтобы точка  $A$  упала въ  $C$  и чтобы прямая  $AB$  пошла по  $CD$ ; если при этомъ концы  $B$  и  $D$  совпадутъ, то  $AB = CD$ ; въ противномъ случаѣ отрезки считаются не равными, причемъ меньшимъ будетъ тотъ, который составить только часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрезокъ, равный данному отрезку, употребляютъ *циркуль*—приборъ, извѣстный учащимся изъ опыта.

**12. Сумма конечныхъ прямыхъ.** Суммою нѣсколькихъ данныхъ отрезковъ прямой наз. такой новый отрезокъ прямой, который составленъ изъ частей, соответственно равныхъ даннымъ отрезкамъ. Положимъ, напр., требуется найти сумму двухъ отрезковъ  $AB$  и  $CD$  (черт. 4). Для этого на какой-нибудь неопредѣленной прямой беремъ произвольную точку  $M$  и откладываемъ отъ нея часть  $MN$ , равную  $AB$ , затѣмъ отъ точки  $N$  въ томъ же направленіи откладываемъ часть  $NP$ , равную  $CD$ . Отрезокъ  $MP$  будетъ сумма данныхъ отрезковъ  $AB$  и  $CD$ . Подобнымъ образомъ можно получить сумму трехъ и болѣе отрезковъ.

Изъ понятія о суммѣ выводятся понятія о разности, произведеніи и частномъ отрезковъ. Такъ, *разность* отрезковъ  $AB$  и  $CD$  есть третій отрезокъ, котораго сумма съ  $CD$  образуетъ  $AB$ ; *произведеніе* отрезка  $AB$  на отвѣченное число 3 есть сумма трехъ отрезковъ, изъ которыхъ каждый равенъ  $AB$ ; и т. п.

**13. Плоскость.** Такъ наз. поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что *прямая, проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки этой поверхности, лежитъ въ ней всѣми остальными*

*своими точками.* Положимъ, напр., мы желаемъ убѣдиться, будетъ ли плоскостью поверхность стола. Для этого беремъ хорошо вывѣренную линейку и прикладываемъ ее въ различныхъ направленіяхъ къ поверхности стола такъ, чтобы какія-нибудь двѣ точки линейки лежали на этой поверхности. Если при этомъ окажется, что, въ какомъ бы направленіи мы линейку ни приложили, всѣ остальные точки ея будутъ лежать на поверхности стола, то эта поверхность есть плоскость.

Укажемъ еще слѣдующее свойство плоскости, которое мы примемъ здѣсь безъ доказательства\*):

*Всякую часть плоскости можно наложить совмѣстивъ ея точки на другое мѣсто этой или другой плоскости, причемъ накладываемую часть можно предварительно перевернуть другою стороною.*

**14. Раздѣленіе геометріи.** Геометрія раздѣляется на двѣ части: геометрія на плоскости или *планиметрія*, и геометрія въ пространствахъ или *стереометрія*. Первая разсматриваетъ свойства такихъ фигуръ, которыя всѣ размѣщены въ одной плоскости; вторая—свойства такихъ фигуръ, которыя не помѣщаются въ одной плоскости.

---

\*) Доказательство излагается въ началѣ курса стереометріи.

# ПЛАНИМЕТРІЯ.

## КНИГА I.

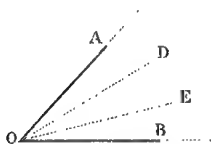
# ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

## ГЛАВА I.

### УГЛЫ.

#### Предварительныя понятія.

**15. Опредѣленія.** Когда двѣ прямыя ( $OA$  и  $OB$ , черт. 5) исходятъ изъ одной точки, то онѣ образуютъ то, что наз. *угломъ*. Прямыя, образующія уголъ, наз. *сторонами*, а точка,



Черт. 5

изъ которой онѣ исходятъ, — *вершиною* угла. Стороны должно представлять себѣ продолженными отъ вершины неопредѣленно.

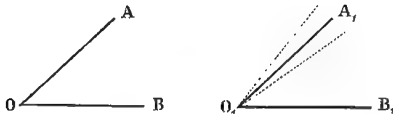
Уголъ обыкновенно обозначается тремя буквами, изъ которыхъ средняя ставится у вершины, а крайнія у какихъ-нибудь точекъ сторонъ; напр., говорятъ: „уголъ  $AOB$  или уголъ  $BOA$  (черт. 5)“. Но можно обозначать уголъ и одною буквою, поставленною у вершины, если при этой вершинѣ нѣтъ другихъ угловъ. Мы иногда будемъ обозначать уголъ цифрою, поставленною внутри угла, около вершины.

Если изъ вершины угла (черт. 5) проведемъ внутри его какія-нибудь прямыя  $OD$ ,  $OE$ ,..., то образовавшіеся при этомъ углы  $AOD$ ,  $DOE$ ,  $EOB$ ... рассматриваются, какъ *части* угла  $AOB$ .

Слово „уголъ“ на письмѣ замѣняется иногда знакомъ  $\angle$ .

**16. Равенство угловъ.** Два угла считаются равными или неравными, смотря по тому, совмѣщаются ли они при нало-

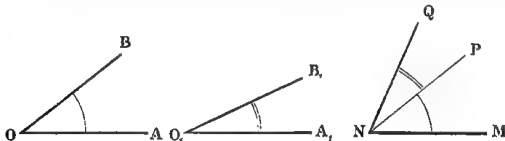
женіи или нѣтъ. Положимъ, напр., что мы накладываемъ уголь  $AOB$  на уголь  $A_1O_1B_1$  (черт. 6) такъ, чтобы вершина  $O$  упала въ  $O_1$ , прямая  $OB$  пошла по  $O_1B_1$ , и чтобы углы покрыли другъ друга. Если при этомъ сторона  $OA$  со-



Черт. 6

вмѣстится съ  $O_1A_1$ , то углы равны; если же  $OA$  пойдетъ внутри угла  $A_1O_1B_1$ , или внѣ его, то углы не равны, причемъ тотъ изъ нихъ будетъ меньше, который составитъ часть другого угла.

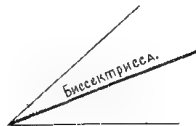
**17. Сумма угловъ.** Суммою двухъ угловъ  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$  (черт. 7) наз. такой уголь  $MNQ$ , который составленъ изъ



Черт. 7

частей, соответственно равныхъ угламъ  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$ . Подобнымъ образомъ можетъ быть составлена сумма трехъ и болѣе угловъ.

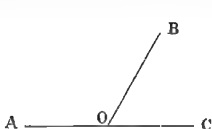
Изъ понятія о суммѣ угловъ выводятся понятія объ ихъ разности, произведеніи и частномъ. Замѣтимъ, что прямая, дѣлящая уголь пополамъ, наз. *биссектрисою* угла (черт. 8).



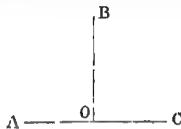
Черт. 8

### Свойства прямого угла.

**18. Определе́нія.** Два угла ( $\angle OВ$  и  $\angle ВОС$ , черт. 9) наз. *смежными*, если одна сторона у нихъ общая, а двѣ другія стороны составляютъ продолженіе одна другой. Когда



Черт. 9



Черт. 10

два смежные угла равны (черт. 10), то общая ихъ сторона  $OB$  наз. *перпендикуляромъ* къ прямой  $AC$ , на которой лежатъ другія стороны; если же смежные углы неравны (черт. 9), то  $OB$  наз. *наклонною* къ  $AC$ . Въ томъ и другомъ случаѣ точка  $O$  наз. *основаніемъ* (перпендикуляра или наклонной)

*Каждый изъ равныхъ смежныхъ угловъ наз. прямымъ.*

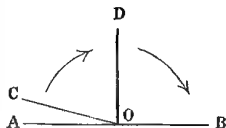
Говорятъ: „*возставить* къ прямой перпендикуляръ“, если этотъ перпендикуляръ приходится проводить черезъ точку, взятую на прямой, и „*опустить* на прямую перпендикуляръ“, если онъ проводится черезъ точку, взятую внѣ прямой. Говорятъ: „*перпендикуляръ къ срединѣ* прямой“, разумѣя подъ этимъ перпендикуляръ къ конечной прямой, проведенный черезъ ея средину.

Что смежные углы могутъ быть равны, видно изъ слѣдующей теоремы.

**19. Теорема.** Изъ всякой точки прямой можно, по ту и другую сторону отъ этой прямой, возставить къ ней перпендикуляръ и притомъ только одинъ.

Пусть дана какая-нибудь прямая  $AB$  (черт. 11) и на ней произвольная точка  $O$ . Требуется доказать: во 1) что изъ этой точки можно, по каждую сторону отъ прямой  $AB$ , напр. по верхнюю, возставить къ  $AB$  перпендикуляръ, и во 2), что этотъ перпендикуляръ можетъ быть только одинъ.

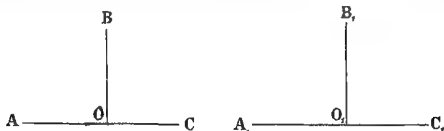
Для доказательства проведемъ изъ точки  $O$  прямую  $OC$ , почти сливающуюся съ  $OA$ , и затѣмъ станемъ ее вращать вокругъ точки  $O$  въ направленіи, указанномъ на чертежѣ стрѣлкою, приближая  $OC$  все болѣе и болѣе къ  $OB$ . Тогда  $\angle COA$  будетъ непрерывно увеличиваться, а  $\angle COB$  непрерывно уменьшаться, причемъ послѣдній уголъ можетъ быть сдѣланъ такъ малъ, какъ угодно. Изъ этого слѣдуетъ, что при вращеніи прямая  $OC$  можетъ занять такое положеніе  $OD$ , при которомъ углы  $AOD$  и  $DOB$  окажутся равными; тогда  $OD$  и будетъ перпендикуляромъ къ  $AB$ . Такъ какъ при всякомъ иномъ положеніи вращающейся прямой  $OC$  равенство между смежными углами нарушается, то другого перпендикуляра къ  $AB$  изъ точки  $O$  возставить нельзя, по крайней мѣрѣ по ту же сторону отъ  $AB$ , по какой лежитъ перпендикуляръ  $OD$ .



Черт. 11

**20. Теорема.** *Всѣ прямые углы равны между собою.*

Пусть смежные углы при вершинахъ  $O$  и  $O_1$  (черт. 12) будутъ *прямые*, т.-е.  $\angle AOB = \angle BOC$  и  $\angle A_1O_1B_1 = \angle B_1O_1C_1$ . Требуется доказать, что *прямые углы первой пары равны прямымъ угламъ второй пары*.

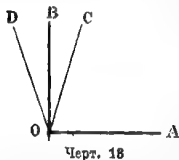


Черт. 12

Наложимъ фигуру  $AOBC$  на фигуру  $A_1O_1B_1C_1$ , такъ, чтобы точка  $O$  упала въ  $O_1$ , прямая  $AC$  пошла по  $A_1C_1$ , и чтобы прямая  $OB$  упала по ту же сторону отъ  $A_1C_1$ , по которой расположена  $O_1B_1$ . Тогда  $OB$  совпадетъ съ  $O_1B_1$ ,

потому что въ противномъ случаѣ изъ одной точки  $O$ , прямой  $A, C_1$  можно было бы возставить къ ней, по одну и ту же сторону, два перпендикуляра, что, по доказанному выше, невозможно. Если же прямая  $OB$  и  $O_1B_1$  совпадутъ, то это значить, что  $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$  и  $\angle COB = \angle C_1O_1B_1$ , что и требовалось доказать.

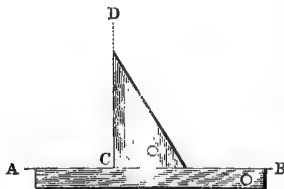
**§1. Опреѣленія.** Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что прямой уголъ представляетъ собою *постоянную* величину (ее обыкновенно обозначаютъ знакомъ  $d$ , т.-е. начальною буквою франц. слова *droit*, *прямой*). Вслѣдствіе этого другіе углы сравниваютъ по величинѣ съ прямымъ угломъ.



Черт. 18

Всякій уголъ  $AOC$  (черт. 13), меньшій прямого угла  $AOB$ , наз. *острымъ*, а всякій уголъ  $AOD$ , большій прямого, наз. *тупымъ*.

**§2. Черченіе прямого угла.** Прямой уголъ легко начертить помощью прибора, называемаго *наугольникомъ*, у котораго одинъ изъ трехъ угловъ дѣлается *прямымъ*. Чтобы начертить прямой уголъ при точкѣ  $C$  прямой  $AB$  (черт. 14), при-



Черт. 14

ставляютъ къ этой прямой линейку, а къ линейкѣ наугольникъ, какъ указано на чертежѣ, и двигаютъ наугольникъ вдоль линейки до тѣхъ поръ, пока вершина прямого угла не совпадетъ съ точкой  $C$ . Остается затѣмъ провести по сторонѣ прямого угла прямую  $CD$ .

**§3. Доказательство наложеніемъ.** Пріемъ доказательства, которымъ мы пользовались въ § 20, весьма часто употребляется въ геометріи для обнаруженія равенства или неравенства фигуръ. Онъ извѣстенъ подъ именемъ *доказательства наложеніемъ*. Замѣтимъ, что наложеніе одной плоской фигуры на другую всегда можно выполнить въ такой послѣдовательности:



1°. Мы можем любую *точку* одной фигуры совмѣстить съ любой *точкою* другой фигуры; напр. (черт. 12) точку  $O$  съ  $O_1$ .

2°. По совмѣщеніи двухъ точекъ мы можемъ, вращая на-  
кладываемую фигуру вокругъ совпавшей точки, совмѣстить  
въ обѣихъ фигурахъ любыя двѣ *прямые*, исходящія изъ сов-  
павшихъ точекъ; напр. (черт. 12) прямую  $OC$  съ  $O_1C_1$ .

3°. По совмѣщеніи двухъ точекъ и двухъ прямыхъ мы  
можемъ, вращая накладываемую фигуру вокругъ совпавшей  
прямой, какъ около оси, расположить эту фигуру или по ту,  
или по другую сторону отъ совпавшей прямой. Напр. (черт.  
12) по совмѣщеніи точекъ  $O$  и  $O_1$  и прямыхъ  $OC$  и  $O_1C_1$ ,  
мы можемъ расположить фигуру  $AOBC$  или такъ, что пря-  
мая  $OB$  пойдетъ къ верху отъ  $O_1C_1$ , или же къ низу отъ  
нея (въ послѣднемъ случаѣ будетъ такъ называемое *прило-*  
*женіе* фигуры).

Послѣ этого нашъ произволъ заканчивается; совпадутъ ли  
другія части фигуръ, зависитъ отъ свойствъ самихъ фигуръ.

### Свойства смежныхъ и вертикальныхъ угловъ.

**§4. Теорема.** *Сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ  
прямымъ.*

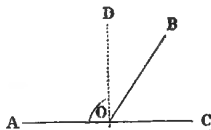
Даны два смежныхъ угла:  $AOB$  и  $BOC$ ; требуется до-  
казать, что  $AOB + BOC = 2d$ .

Возставивъ изъ точки  $O$  къ пря-  
мой  $AC$  перпендикуляръ  $OD$ , мы  
разобьемъ уголъ  $AOB$  на двѣ части:  
 $AOD$  и  $DOB$ , такъ что можно на-  
писать:

$$AOB = AOD + DOB$$

Приложимъ къ обѣимъ частямъ  
этого равенства по углу  $BOC$ ; тогда  
получимъ:

$$AOB + BOC = AOD + DOB + BOC$$

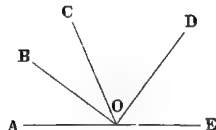


Черт. 15

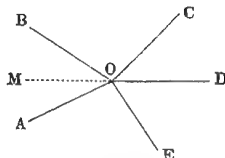
Но сумма  $DOB + BOC$  составляет прямой уголъ  $DOC$ ; следовательно:

$$AOB + BOC = AOD + DOC = d + d = 2d$$

**25. Слѣдствія.** 1°. Сумма угловъ:  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$  (черт. 16), расположенныхъ вокругъ общей вершины  $O$  по одну сторону прямой  $AE$ , равна  $2d$ ,



Черт. 16



Черт. 17

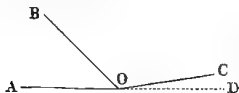
потому что эта сумма составляет сумму двухъ смежныхъ угловъ, напр. такихъ:  $AOC + COE$ .

2°. Сумма угловъ:  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$ ,  $EOA$  (черт. 17), расположенныхъ вокругъ общей вершины  $O$  по обѣ стороны какой-нибудь прямой  $DM$ , равны  $4d$ ,

потому что эта сумма равна  $(MOB + BOC + COD) + (DOE + EOA + AOM) = 2d + 2d = 4d$ .

**26. Обратная теорема.** Если сумма двухъ угловъ, имеющихъ общую сторону и не покрывающихъ другъ друга, равна двумъ прямымъ, то такіе углы смежные, т.-е. двѣ другія стороны ихъ составляютъ продолженіе одна другой.

Пусть даны два угла:  $AOB$  и  $BOC$ , имѣющіе общую сторону  $OB$  и не покрывающіе другъ друга; пусть, кромѣ того, сумма ихъ равна  $2d$ ; требуется доказать, что  $OC$  есть продолженіе  $AO$ .



Черт. 18

Для доказательства допустимъ временно, что продолженіе стороны  $AO$  пойдет по нѣкоторому направленію  $OD$ , не сливающемуся съ  $OC$ . Посмотримъ, къ чему приведетъ насъ это допущеніе.

ніе. Такъ какъ углы  $AOB$  и  $BOD$  смежные, то по доказанному выше (24):

$$AOB + BOD = 2d$$

Въ то же время, согласно условію нашей теоремы, мы имѣемъ:

$$AOB + BOC = 2d$$

Правыя части этихъ двухъ равенствъ равны, слѣд. равны и лѣвыя:

$$AOB + BOD = AOB + BOC$$

Отнявъ отъ равныхъ суммъ по одному и тому же углу  $AOB$ , мы должны получить равные остатки:

$$BOD = BOC.$$

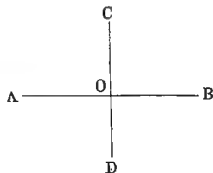
Это равенство *невозможно*, такъ какъ изъ чертежа непосредственно видно, что  $\angle BOD$  больше  $\angle BOC$ .

Если въ результатѣ разсужденія мы получаемъ невозможный (нелѣпый) выводъ, то это можетъ произойти отъ двухъ причинъ: или мы не вѣрно разсуждали, или же мы основывались на невозможномъ допущеніи. Разсужденіе наше было правильно; значитъ, причина нелѣпаго вывода заключается въ невозможности допущенія, будто продолженіе  $AO$  не *свпадаетъ* съ  $OC$ . Если же это предположеніе невозможно, то остается только одно: *продолженіе  $AO$  есть  $OC$*  (слѣд., нашъ чертежъ сдѣланъ неправильно); что и требовалось доказать.

**27. Слѣдствіе.** Если изъ одной точки  $O$  прямой  $AB$  возставимъ къ ней, по каждую ея сторону, перпендикуляры  $OC$  и  $OD$ , то эти перпендикуляры образуютъ одну прямую  $CD$ , потому что сумма угловъ  $COB$  и  $BOD$  равна  $2d$ .

**28. Опредѣленіе.** Неопредѣленная прямая  $CD$  (черт. 19), которой части  $OC$  и  $OD$  служатъ перпендикулярами къ прямой  $AB$ , наз. *линей, перпендикулярной къ  $AB$* .

Если  $CD$  перпендикулярна къ



Черт. 19

$AB$ , то и  $AB$  перпендикулярна къ  $CD$ , потому что части  $OA$  и  $OB$  служатъ также перпендикулярами къ  $CD$ . Поэтому прямыя  $AB$  и  $CD$  наз. *взаимно-перпендикулярными*.

Что двѣ прямыя  $AB$  и  $CD$  взаимно перпендикулярны, выражаютъ именованно такъ:  $AB \perp CD$ .

**29. Доказательство отъ противнаго.** Способъ доказательства, которымъ мы пользовались въ § 26, наз. доказательствомъ *отъ противнаго*, или *приведеніемъ къ нелѣпости* (*reductio ad absurdum*). Первое названіе этотъ способъ получаетъ потому, что въ началѣ разсужденія дѣлается предположеніе *противное* (противоположное) тому, что требуется доказать. Приведеніемъ къ нелѣпости онъ наз. вслѣдствіе того, что, разсуждая на основаніи сдѣланнаго предположенія, мы приходимъ къ *нелѣпому выводу* (къ абсурду). Полученіе такого вывода заставляетъ насъ отвергнуть сдѣланное въ началѣ допущеніе и принять то, которое требовалось доказать.

**30. Определеніе.** Два угла наз. *вертикальными*, если стороны одного составляютъ продолженіе сторонъ другого.

Такъ, при пересѣченіи двухъ прямыхъ  $AB$  и  $CD$  (черт. 20) образуются двѣ пары вертикальныхъ угловъ:  $AOD$  и  $COB$ ,  $AOC$  и  $DOB$ .

**31. Теорема.** *Вертикальные углы равны.*

Пусть даны два вертикальныхъ угла:  $AOD$  и  $COB$ , т.-е.  $OB$  есть продолженіе  $OA$ , а  $OC$  продолженіе  $OD$ . Требуется доказать, что  $AOD = COB$ .

По свойству смежныхъ угловъ можемъ написать:

$$AOD + DOB = 2d$$

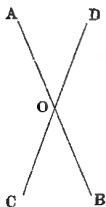
$$DOB + BOC = 2d$$

Значитъ:  $AOD + DOB = DOB + BOC$ .

Отнявъ отъ обѣихъ частей этого равенства по углу  $DOB$ , получимъ:

$$AOD = BOC$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что и  $AOC = DOB$ .



Черт. 20

**32. Теорема.** Из всякой точки вне прямой можно опустить на эту прямую перпендикуляръ и притомъ только одинъ.

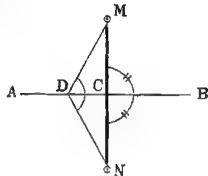
Пусть дана какая-нибудь прямая  $AB$  и вне ея произвольная точка  $M$ ; требуется доказать, что во 1) изъ этой точки можно опустить на прямую  $AB$  перпендикуляръ, и во 2) что этотъ перпендикуляръ можетъ быть только одинъ.

Перегнемъ чертежъ по прямой  $AB$  такъ, чтобы верхняя его часть упала на нижнюю. Тогда точка  $M$  займетъ некоторое положеніе  $N$ . Отмѣтивъ это положеніе, приведемъ чертежъ въ прежній видъ и затѣмъ соединимъ точки  $M$  и  $N$  прямою. Теперь докажемъ, что прямая  $MN$  перпендикулярна къ  $AB$ , а всякая иная прямая, исходящая изъ  $M$ , напр.  $MD$ , не перпендикулярна къ  $AB$ . Для этого перегнемъ чертежъ вторично. Тогда точка  $M$  снова совмѣстится съ  $N$ , а точки  $C$  и  $D$  останутся на своихъ мѣстахъ; слѣд., прямая  $MC$  совпадетъ съ  $CN$ , а  $MD$  съ  $DN$ . Изъ этого слѣдуетъ, что  $\angle MCB = \angle BCN$  и  $\angle MDC = \angle CDN$ . Но углы  $MCB$  и  $BCN$  смежные и, какъ теперь видимъ, равные; слѣд., каждый изъ нихъ есть прямой, а потому  $MN \perp AB$ . Такъ какъ линія  $MDN$  не прямая (между точками  $M$  и  $N$  не можетъ быть двухъ различныхъ прямыхъ), то сумма двухъ равныхъ угловъ  $MDC$  и  $CDN$  не равна  $2d$ ; поэтому уголъ  $MDC$  не есть прямой, и, значитъ,  $MD$  не перпендикулярна къ  $AB$ . Такимъ образомъ, другого перпендикуляра изъ точки  $M$  на прямую  $AB$  опустить нельзя.

**Замѣчаніе.** Чтобы опустить перпендикуляръ на прямую изъ данной точки, можно пользоваться линейкой и наугольникомъ (см. черт. 14).

**Упражненія.** Доказать, что:

1. Биссектриссы двухъ вертикальныхъ угловъ составляютъ продолженіе одна другой.
2. Биссектриссы двухъ смежныхъ угловъ перпендикулярны.



Черт. 21

3. Если при точкѣ  $O$  прямой  $AB$  (черт. 20) построимъ, по разныя стороны отъ  $AB$ , равные углы  $AOD$  и  $BOC$ , то стороны ихъ  $OD$  и  $OC$  составляютъ одну прямую.

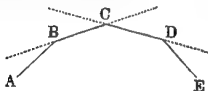
4. Если изъ точки  $O$  (черт. 20) проведемъ прямыя  $OA$ ,  $OD$ ,  $OB$ ,  $OC$  такъ, что  $\angle AOC = \angle DOB$  и  $\angle AOD = \angle COB$ , то  $OB$  есть продолженіе  $OA$  и  $OD$  продолженіе  $OC$ .

## ГЛАВА II.

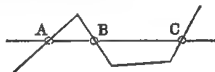
### Треугольники и многоугольники.

#### Понятіе о многоугольникѣ и треугольникѣ.

**33. Ломаная линія.** Линія наз. *ломаной*, когда она состоитъ изъ отрѣзковъ прямой, не расположенныхъ на одной прямой (черт. 22 или 23). Эти отрѣзки наз. *сторонами* ломаной, а вершины угловъ, образуемыхъ сосѣдними отрѣзками, — *вершинами* ея. Ломаная линія обозначается рядомъ буквъ, поставленныхъ у ея вершинъ и концовъ.



Черт. 22



Черт. 23

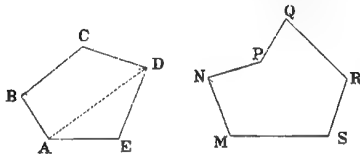
Ломаная  $ABCDE$  наз. *выпуклою*, если она вся расположена по одну сторону отъ *каждаго* составляющаго ее отрѣзка, продолженнаго неопредѣленно.

*Выпуклая ломаная не можетъ пересѣчься съ прямою линіей болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.* Дѣйствительно, если бы ломаная пересѣкалась съ какою-нибудь прямою въ трехъ точкахъ  $A$ ,  $B$  и  $C$  (черт. 23), то она была бы расположена по разныя стороны того отрѣзка, который проходитъ черезъ среднюю точку  $B$ ; значитъ, такую ломаную нельзя было бы назвать *выпуклою*.

Когда концы ломаной сходятся въ одну точку, то она наз. *замкнутой*.

Сумма всѣхъ сторонъ ломаной наз. ея *периметромъ* или *длиной*.

**34. Многоугольникъ.** Часть плоскости, ограниченная замкнутою ломаною линіей, наз. *многоугольникомъ* (черт. 24). Стороны этой ломаной наз. *сторонами* многоугольника, углы, составленные каждымъ двумя сосѣдними сторонами, — *углами* многоугольника, а ихъ вершины — *вершинами* его.



Черт. 24

Многоугольникъ наз. *выпуклымъ*, если онъ ограниченъ выпуклою ломаною линіей. Таковъ, напр., многоуг. *ABCDE* (черт. 24); но нельзя назвать выпуклымъ многоуг. *MNPQRS* (тотъ же черт.).

Всякая прямая *AD*, которая соединяетъ вершины двухъ угловъ многоугольника, не принадлежащихъ къ одной сторонѣ, наз. *диагональю*.

Сумма сторонъ многоугольника наз. *периметромъ* его.

Два многоугольника, какъ и вообще двѣ какія-нибудь геометрическія фигуры, считаются *равными*, если они при наложеніи совмѣщаются.

Наименьшее число сторонъ въ многоугольникѣ *три*. По числу сторонъ многоугольникъ наз. *треугольникомъ*, *четыреугольникомъ*, *пятиугольникомъ* и т. д.

**35. Раздѣленіе треугольниковъ.** Треугольники раздѣляются или по сторонамъ, или по угламъ. Относительно сторонъ они бывають: *разносторонніе* (черт. 25), когда всѣ стороны различной длины, *равнобедренные* (черт. 26), когда двѣ стороны одинаковы, и *равносторонніе* (черт. 27), когда всѣ стороны равны.



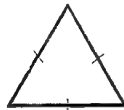
Относительно угловъ треугольники бываютъ: *остроуголь-*  
*ные* (черт. 25), когда всѣ углы острые, *прямоугольные* (черт.  
28), когда въ числѣ угловъ есть прямой, и *тупоугольные*



Черт. 25



Черт. 26



Черт. 27

(черт. 29), когда въ числѣ угловъ есть тупой. Въ прямоу-  
гольномъ треугольникѣ стороны, образующія прямой уголъ,  
назыв. *катетами*, а сторона, лежащая противъ прямого  
угла,—*гипотенузой*.



Черт. 28



Черт. 29

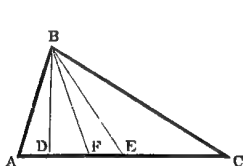
**36. Главнѣйшія линіи въ треугольникѣ.** Одну изъ сторонъ  
треугольника обыкновенно называютъ *основаніемъ*, вершину  
противолежащаго угла—*вершиною* тр.-ка, а перпендикуляръ,  
опущенный изъ вершины на основаніе или на его продолже-  
ніе,—*высотой* его. Такъ если въ тр.-кѣ  $ABC$  (черт. 30  
или 31) за основаніе взята сторона  $AC$ , то  $B$  будетъ вер-  
шина,  $BD$  высота тр.-ка.

Въ равнобедренномъ тр.-кѣ основаніемъ называютъ обык-  
новенно сторону, не принадлежащую къ равнымъ.

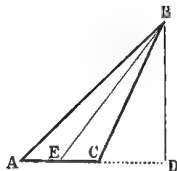
Прямая  $BE$  (черт. 30 или 31), соединяющая вершину  
какого-нибудь угла тр.-ка съ *срединою* противоположной сто-

роны, наз. *медіаною* (средней линіей). Прямая  $BF$  (черт. 30), дѣлящая какой-нибудь уголъ тр.-ка пополамъ, наз. *биссектрисою*.

На письмѣ слово „треугольникъ“ замѣняется иногда знакомъ  $\triangle$ .



Черт. 30

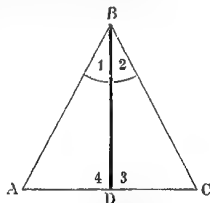


Черт. 31

### Свойства равнобедреннаго треугольника.

**31. Теорема.** *Въ равнобедренномъ треугольникѣ биссектриса угла при вершинѣ служитъ одновременно медіаною, высотой и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія.*

Пусть тр.-къ  $ABC$  равнобедренный и прямая  $BD$  дѣлитъ пополамъ уголъ  $B$  при вершинѣ его. Требуется доказать, что  $BD$  есть также и медіана, и высота, и перпендикуляръ къ срединѣ основанія. Вообразимъ, что  $\triangle ABD$  повернуть вокругъ стороны  $BD$  такъ, чтобы онъ упалъ на  $\triangle BDC$ . Тогда, вслѣдствіе равенства угловъ 1 и 2, сторона  $AB$  упадетъ на  $BC$ ,



Черт. 32

а вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка  $A$  совпадетъ съ  $C$ . Поэтому  $DA$  совмѣстится съ  $DC$  и уголъ 4 съ угломъ 3; значитъ,  $DA = DC$  и  $\angle 3 = \angle 4$ . Изъ того, что  $DA = DC$ , слѣдуетъ, что  $BD$  есть медіана; изъ того, что углы 3 и 4 равны, выходитъ, что эти углы прямые, и  $BD$

есть высота тр.-ка  $ABC$ ; наконецъ, изъ того и другого вмѣстѣ выводимъ, что  $BD$  есть перпендикуляръ къ срединѣ основанія.

**38. Слѣдствіе. 1°.** Такимъ образомъ мы видимъ, что въ равнобедренномъ тр.-кѣ  $ABC$  (черт. 32) одна и та же прямая  $BD$  обладаетъ 4-мя свойствами: она есть биссектрисса угла при вершинѣ, медиана, проведенная къ основанію, высота, опущенная на основаніе, и, наконецъ, перпендикуляръ къ срединѣ основанія. Такъ какъ каждое изъ этихъ 4-хъ свойствъ вполне опредѣляетъ положеніе прямой  $BD$ , то существованіе одного изъ нихъ влечетъ за собой всѣ остальные. Напр.:

*высота, опущенная на основаніе равнобедреннаго треугольника, служитъ одновременно биссектриссою угла при вершинѣ, медианою, проведенною къ основанію, и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія.*

Дѣйствительно, во 1, эта высота должна служить биссектриссою угла при вершинѣ, потому что въ противномъ случаѣ, проведи такую биссектриссу, мы имѣли бы двѣ высоты на одну и ту же сторону тр.-ка, что невозможно. Во 2, эта высота, будучи биссектриссою, должна быть, по доказанному, и медианою, и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія.

**39. Слѣдствіе 2°.** Изъ того, что тр.-ки  $ABD$  и  $BDC$  (черт. 32) совмѣщаются всѣми своими частями, слѣдуетъ, что  $\angle A = \angle C$ , т.-е.

*въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны.*

### Признаки равенства треугольниковъ.

**40. Предварительныя понятія.** Такъ какъ равными треугольниками наз. такіе, которые при наложеніи совмѣщаются, то въ такихъ тр.-кахъ равны всѣ соотвѣтствующіе элементы ихъ, т.-е. стороны, углы, высоты, медианы и биссектриссы.

Однако, для того, чтобы утверждать равенство двухъ треугольниковъ, не необходимо знать равенство *всѣхъ* элементовъ ихъ; достаточно убѣдиться въ равенствѣ только нѣкоторыхъ изъ нихъ. Слѣдующія теоремы излагаютъ три главнѣйшіе признака равенства тр.-ковъ.

**4.1. Теоремы.** Два треугольника равны, если:

1°, две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника;

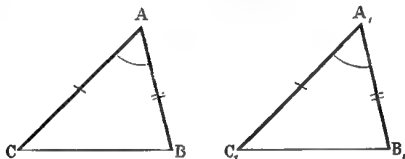
или 2°, два угла и прилегающая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилегающей к ним стороне другого треугольника;

или 3°, три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

1°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будут два тр.-ка, у которых:

$$A = A_1, AC = A_1C_1 \text{ и } AB = A_1B_1.$$

Требуется доказать, что эти тр.-ники равны.



Черт. 33

Наложим  $\triangle ABC$  на  $\triangle A_1B_1C_1$  такъ, чтобы точка  $A$  совпала съ  $A_1$  и сторона  $AC$  пошла по  $A_1C_1$ . Тогда, вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ, точка  $C$  совмѣстится съ  $C_1$ ; вслѣдствіе равенства угловъ  $A$  и  $A_1$  сторона  $AB$  пойдетъ по  $A_1B_1$ , а вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка  $B$  упадетъ въ  $B_1$ ; поэтому сторона  $CB$  совмѣстится съ  $C_1B_1$  (между двумя точками можно провести только одну прямую) и треугольники совпадутъ; значить, они равны.

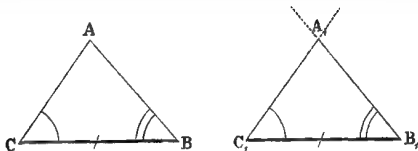
2°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$CB = C_1B_1, C = C_1 \text{ и } B = B_1.$$

Требуется доказать, что эти тр.-ники равны (черт. 34).

Наложимъ  $\triangle ABC$  на  $\triangle A_1B_1C_1$  такъ, чтобы точка  $C$  совпала съ  $C_1$  и сторона  $CB$  пошла по  $C_1B_1$ ; тогда, вслѣд-

ствие равенства этих сторонъ, точка  $B$  упадетъ въ  $B_1$ , а вследствие равенства угловъ  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$ , сторона  $BA$  пойдетъ по  $B_1A_1$  и сторона  $CA$  по  $C_1A_1$ . Такъ какъ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то вершина  $A$  должна совпасть съ  $A_1$ . Такимъ образомъ, тр.-ники совмѣстятся; значить, они равны.

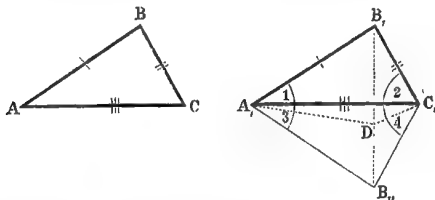


Черт. 34

3°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1 \quad \text{и} \quad CA = C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти тр.-ники равны (черт. 35).



Черт. 35

Доказывать этотъ признакъ равенства *наложениемъ*, какъ мы это дѣлали для первыхъ двухъ признаковъ, было бы неудобно, такъ какъ, не зная ничего о величинѣ угловъ, мы не можемъ утверждать, что при совпадении двухъ равныхъ сторонъ совпадутъ и остальные. Употребимъ иной приемъ доказательства.

Приложимъ  $\triangle ABC$  къ  $\triangle A_1B_1C_1$  такъ, чтобы у нихъ слились равныя стороны  $AC$  и  $A_1C_1$ . Тогда  $\triangle ABC$  займетъ положеніе  $A_1C_1B_{11}$ . Соединивъ прямою точки  $B_1$  и  $B_{11}$ , мы получимъ два равнобедренные тр.-ка  $A_1B_1B_{11}$  и  $B_1C_1B_{11}$ , съ общимъ основаніемъ  $B_1B_{11}$ . Докажемъ, что въ каждомъ изъ нихъ прямая  $A_1C_1$  служить биссектриссою угловъ при вершинѣ. Для этого допустимъ временно, что биссектрисса угла  $B_1A_1B_{11}$  будетъ не  $A_1C_1$ , а какая-нибудь иная прямая  $A_1D$ , и биссектриссой угла  $B_1C_1B_{11}$  будетъ не  $C_1A_1$ , а какая-нибудь иная прямая  $C_1D$ . Такъ какъ въ равнобедренномъ тр.-кѣ биссектрисса угла при вершинѣ служитъ въ то же время и медианою, и высотой (37), то прямая  $A_1D$  и  $C_1D$ , во 1-хъ, должны пройти черезъ одну и ту же точку прямой  $B_1B_{11}$ , именно черезъ середину ея, во 2-хъ, онѣ должны составить одну прямую (26). Но черезъ двѣ точки  $A_1$  и  $C_1$  можно провести только одну прямую; значить, биссектриссы  $A_1D$  и  $C_1D$  должны слиться съ прямой  $A_1C_1$ . Изъ этого слѣдуетъ, что  $\angle 1 = \angle 3$  и  $\angle 2 = \angle 4$ . Но въ такомъ случаѣ данныя тр.-ки должны быть равны, такъ какъ два угла и прилежащая къ нимъ сторона одного равны соответственно двумъ угламъ и прилежащей къ нимъ сторонѣ другого.

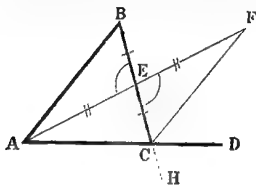
**Замѣчаніе.** Въ равныхъ тр.-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы и противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны.

### Соотношеніе между углами и сторонами треугольника.

**42. Теорема.** Если какую-нибудь сторону треугольника продолжимъ въ одномъ направленіи, то образовавшійся при этомъ внѣшній уголъ больше каждаго внутренняго угла, не смежнаго съ нимъ.

Напр., продолжимъ въ тр.-кѣ  $ABC$  (черт. 36) сторону  $AC$  за точку  $C$  и докажемъ, что внѣшній уголъ  $BCD$  больше каждаго изъ внутреннихъ угловъ  $A$  и  $B$ , не смежныхъ съ внѣшнимъ. Черезъ середину  $E$  стороны  $BC$  проведемъ медиану  $AE$  и продолжимъ ея на длину  $EF$ , равную  $AE$ . Соединимъ  $F$  съ  $C$ . Тр.-ки  $ABE$  и  $EFC$  равны, такъ какъ при точкѣ  $E$

они имѣютъ по равному углу, заключенному между двумя соответственно равными сторонами. Изъ равенства ихъ заключаемъ, что углы  $B$  и  $ECF$ , лежащіе противъ равныхъ сторонъ  $AE$  и  $EF$ , равны; но уголъ  $ECF$ , составляя часть вѣшняго угла  $BCD$ , меньше его; слѣд., и уголъ  $B$  меньше  $BCD$ .



Черт. 36

Продолживъ сторону  $BC$  за точку  $C$ , мы получимъ вѣшній уголъ  $ACH$ , равный углу  $BCD$  (какъ вертикальный съ нимъ). Если изъ вершины  $B$  проведемъ къ сторонѣ  $AC$  медиану и продолжимъ ее на такую же длину за сторону  $AC$ , то совершенно такъ же докажемъ, что уголъ  $A$  меньше  $ACH$ , т.-е. меньше  $BCD$ .

**43. Слѣдствіе.** Если въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, или тупой, то два другіе угла острые.

Дѣйствительно, допустимъ, что какой-нибудь уголъ  $C$  тр.-ка  $ABC$  (черт. 36) будетъ прямой или тупой; тогда смежный съ нимъ вѣшній уголъ долженъ быть прямой или острый; вслѣдствіе этого углы  $A$  и  $B$ , которые, по доказанному, меньше вѣшняго угла, должны быть оба острые.

**44. Теоремы** Во всякомъ треугольникѣ: 1°, противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы; 2°, противъ болѣе длинной стороны лежитъ болѣе большой уголъ.

1°. Если двѣ стороны треугольника равны, то онъ равнобедренный; тогда углы, лежащіе противъ этихъ сторонъ, должны быть равны, какъ углы при основаніи равнобедреннаго треугольника (39).

2°. Пусть въ  $\triangle ABC$  (черт. 37) сторона  $AB$  больше  $BC$ ; требуется доказать, что  $\angle C$  больше  $\angle A$ .

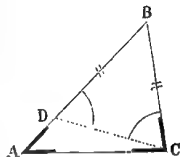
Отложимъ на  $BA$  часть  $BD$ , равную  $BC$ , и соединимъ  $D$  съ  $C$ . Тогда получимъ равнобедренный  $\triangle DBC$ , у котораго углы при основаніи равны, т.-е.  $\angle BDC = \angle BCD$ . Но уголъ  $BDC$ , какъ вѣшній по отношенію къ  $\triangle ADC$ , больше угла  $A$ ; слѣд., и уг.  $BCD$  больше  $A$ , а потому и подавно, уг.  $BCA$  больше угла  $A$ ; что и требовалось доказать.



**45. Слѣдствіе.** Въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы равны; въ разностороннемъ треугольникѣ нѣтъ равныхъ угловъ.

**46. Обратныя теоремы.** Во всякомъ треугольникѣ: 1°, противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны; 2°, противъ большаго угла лежитъ большая сторона.

1°. Пусть углы  $A$  и  $C$  равны (черт. 37); требуется доказать, что  $AB = BC$ . — Предположимъ противное, т.-е. что  $AB$  не равно  $BC$ . Тогда могутъ представиться два случая: или  $AB > BC$ , или  $AB < BC$ . Въ первомъ случаѣ, по доказанному въ теоремѣ прямой, уг.  $C$  долженъ быть больше угла  $A$ , что противорѣчитъ условію; значить, этотъ случай надо исключить. Во второмъ случаѣ, когда  $AB < BC$ , уг.  $C$  долженъ быть меньше угла  $A$ , что также противорѣчитъ условію; значить, и этотъ случай надо исключить. Остается одинъ возможный случай, что  $AB = BC$ .



Черт. 37

2°. Пусть въ томъ же тр—къ уг.  $C$  больше угла  $A$ ; требуется доказать, что  $AB > BC$ . — Предположимъ противное, т.-е. что  $AB$  не больше  $BC$ . Тогда могутъ представиться два случая: или  $AB = BC$ , или  $AB < BC$ . Въ первомъ случаѣ, согласно прямой теоремѣ, углы  $A$  и  $C$  были бы равны, во второмъ случаѣ уг.  $A$  былъ бы больше  $C$ ; и то, и другое противорѣчитъ условію; значить, оба эти случая исключаются. Остается одинъ возможный случай, что  $AB > BC$ .

**47. Слѣдствія.** 1°. Равноугольный треугольникъ есть равносторонний:

2°. Въ треугольникѣ сторона, лежащая противъ тупого или прямого угла, больше другихъ сторонъ (43).

**48. Замѣчаніе объ обратныхъ теоремахъ.** Если въ теоремѣ или рядѣ теоремъ мы рассмотрѣли всевозможные случаи, которые могутъ представиться относительно величины или расположенія нѣкоторыхъ частей фигуры, причемъ оказалось, что въ различныхъ случаяхъ получаются различные выводы

относительно величины или расположения других частей фигуры, то можем утверждать заранее (à priori), что *обратныя предложенія вѣрны*.

Приведемъ этому примѣръ. Относительно величины двухъ сторонъ треугольника, напр.  $AB$  и  $BC$ , могутъ представиться только слѣдующіе три различные случая:

$$AB = BC, \quad AB > BC, \quad AB < BC.$$

Въ теоремахъ § 44-го мы рассмотрѣли всѣ эти случаи, причемъ оказалось, что въ каждомъ изъ нихъ получаются *различныя* выводы относительно величины противолежащихъ угловъ  $A$  и  $C$ , а именно:

$$A = C, \quad A < C, \quad A > C.$$

И мы видѣли (46), что обратныя предложенія оказались *вѣрными*, въ чемъ легко было убѣдиться доказательствомъ отъ противнаго.

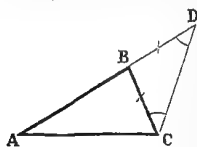
Впослѣдствіи намъ неоднократно придется убѣждаться въ вѣрности этого замѣчанія.

### Сравнительная длина объемлющихъ и объемлемыхъ ломаныхъ линий.

**49. Теорема.** *Въ треугольнике одна сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ.*

Пусть въ  $\triangle ABC$  сторона  $AC$  будетъ наибольшая. Докажемъ, что даже эта наибольшая сторона меньше суммы другихъ сторонъ, т.-е. меньше  $AB + BC$ . — Продолживъ  $AB$ , отложимъ  $BD = BC$  и проведемъ  $DC$ . Такъ какъ  $\triangle BDC$  равнобедренный, то  $\angle D = \angle DCB$ ; по этому уголъ  $D$  меньше угла  $DCA$ , и, слѣд., въ  $\triangle ADC$  сторона  $AC$  меньше  $AD$  (46), т.-е.  $AC < AB + BD$ . Заменявъ  $BD$  на  $BC$ , получимъ

$$AC < AB + BC.$$



Черт. 38

**50. Следствие.** Отнявъ отъ обѣихъ частей выведеннаго неравенства по  $AB$  или по  $BC$ , найдемъ:

$$AC - AB < BC \text{ и } AC - BC < AB.$$

Читая эти неравенства справа налѣво, можемъ ихъ выразить такъ:

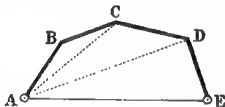
*въ треугольникѣ одна сторона больше разности двухъ другихъ сторонъ.*

**51. Теорема.** Отрезокъ прямой короче всякой ломаной, проведенной между его концами.

Пусть  $AE$  будетъ прямая, а  $ABCDE$  какая-нибудь ломаная, проведенная между концами прямой. Требуется доказать, что  $AE$  короче  $AB + BC + CD + DE$ .

Соединивъ  $A$  съ  $C$  и  $D$ , находимъ, согласно предыдущей теоремѣ:

$$AE < AD + DE; \quad AD < AC + CD; \quad AC < AB + BC.$$



Черт. 39

Сложимъ почленно эти неравенства и затѣмъ отнимемъ отъ обѣихъ частей по  $AD$  и  $AC$ ; тогда получимъ:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

**52. Теорема.** Выпуклая ломаная короче всякой объемлющей ломаной.

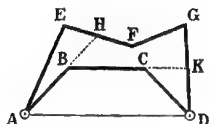
Если изъ двухъ ломаныхъ линий, проведенныхъ между двумя точками  $A$  и  $D$  (черт. 40) и расположенныхъ по одну сторону отъ прямой  $AD$ , одна вся заключена внутри многоугольника, образованнаго другою ломаной съ прямой  $AD$ , то вѣшняя изъ нихъ наз. *объемлющей*, а внутренняя — *объемлемой*.

Пусть  $ABCD$  будетъ выпуклая ломаная, а  $AEEFGD$  какая-нибудь объемлющая ломаная. Требуется доказать, что  $ABCD$  короче  $AEEFGD$ .—Продолживъ стороны  $AB$  и  $BC$ , какъ указано на чертежѣ, найдемъ (49 и 51):

$$AB + BH < AE + EH$$

$$BC + CK < BH + HF + FG + GK$$

$$CD < CK + KD.$$



Черт. 40

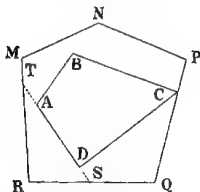
Сложивъ эти неравенства, сократимъ результатъ на вспомо-  
гательные отрезки  $BH$  и  $CK$  и за-  
тѣмъ замѣнимъ  $EH + HF$  черезъ  
 $EF$  и  $GK + KD$  черезъ  $GD$ ;  
тогда получимъ:

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD; \text{ что и тр. док.}$$

**53. Слѣдствіе.** Периметръ выпуклаго многоугольника  
меньше периметра всякаго другого многоугольника, внутри  
котораго заключенъ первый.

Пусть  $ABCD$  будетъ выпуклый многоугольникъ, а  $MNPQR$   
какой-нибудь многоугольникъ, внутри котораго заключенъ пер-  
вый. Требуется доказать, что

$$AB + BC + CD + DA < RM + MN + NP + PQ + QR.$$



Черт. 41

Продолживъ въ обѣихъ направ-  
леніяхъ какую-нибудь сторону  $AD$   
выпуклаго многоугольника, будемъ  
имѣть:

$$\begin{aligned} AB + BC + CD &< AT + TM + \\ &+ MN + NP + PQ + QS + SD; \\ AT + AD + DS &< SR + RT. \end{aligned}$$

Сложивъ эти неравенства, сок-  
ратимъ результатъ на  $AT$  и  $DS$ ; затѣмъ замѣнимъ  $RT + TM$   
черезъ  $RM$  и  $RS + QS$  черезъ  $RQ$ ; тогда получимъ:

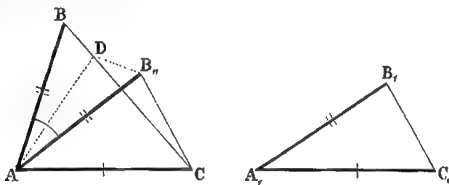
$$AB + BC + CD + DA < RM + MN + NP + PQ + QR.$$

# Треугольники съ двумя соотвѣтственно равными сторонами.

**54. Теоремы.** Если два стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другого треугольника, то

1°, противъ большаго изъ угловъ, заключенныхъ между ними, лежитъ большая сторона;

2°, обратно: противъ большей изъ остальныхъ сторонъ лежитъ больший уголъ.



Черт. 42

1°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будутъ два треугольника, у которыхъ:

$$AC = A_1C_1, AB = A_1B_1 \text{ и } A > A_1.$$

Требуется доказать, что  $BC > B_1C_1$ . — Наложимъ  $\triangle A_1B_1C_1$  на  $\triangle ABC$  такъ, чтобы сторона  $A_1C_1$  совпала съ  $AC$ . Такъ какъ  $A_1 < A$ , то сторона  $A_1B_1$  пойдетъ внутри угла  $A$ ; пусть  $\triangle A_1B_1C_1$  займетъ положеніе  $ACB_{11}$  (вершина  $B_{11}$  можетъ упасть или въ  $\triangle ABC$ , или внутри его, или же на сторону  $BC$ ; доказательство можетъ быть примѣнено ко всѣмъ этимъ случаямъ). Проведемъ биссектрису  $AD$  угла  $BAB_{11}$  и соединимъ  $D$  съ  $B_{11}$ ; тогда получимъ два тр.—ка  $ABD$  и  $DAB_{11}$ , которые равны, потому что у нихъ  $AD$  общая сторона,  $AB = AB_{11}$  по условію и  $\angle BAD = \angle DAB_{11}$  по дѣленію. Изъ равенства тр.—ковъ слѣдуетъ:  $BD = DB_{11}$ . Теперь изъ  $\triangle DCB_{11}$  выводимъ:  $B_{11}C < B_{11}D + DC$  (49), или (замѣнивъ  $B_{11}D$  на  $BD$ ):

$$B_1C < BD + DC, \text{ т.-е. } B_1C_1 < BC.$$

2°. Пусть въ тѣхъ же треугольникахъ будетъ дано условіе:

$$AB = A_1B_1 \quad AC = A_1C_1 \quad \text{и} \quad BC > B_1C_1.$$

Требуется доказать, что  $A > A_1$ .—Предположимъ противное, т.-е. что  $A$  не больше  $A_1$ ; тогда могутъ представиться два случая: или  $A = A_1$ , или  $A < A_1$ . Въ первомъ случаѣ тр.—ки были бы равны и, слѣд., сторона  $BC$  равнялась бы  $B_1C_1$ , что противорѣчитъ условію; во второмъ случаѣ сторона  $BC$  была бы меньше  $B_1C_1$ , что также противорѣчитъ условію. Значить, оба эти случая исключаются; остается одинъ возможный случай, что  $A > A_1$ .

### ГЛАВА III.

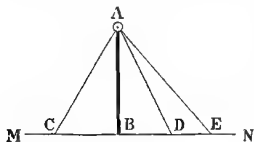
#### Перпендикуляры и наклонныя.

**55. Теоремы.** Когда изъ одной точки проведены къ одной прямой перпендикуляръ и нѣсколько наклонныхъ, то:

1°, перпендикуляръ короче всякой наклонной;

2°, если двѣ наклонныя одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, то онѣ равны;

3°, если двѣ наклонныя неодинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, то та изъ нихъ больше, которая дальше отстоитъ отъ перпендикуляра.



Черт. 43

1°. Пусть изъ точки  $A$  къ прямой  $MN$  проведены перпендикуляръ  $AB$  и какая-нибудь наклонная  $AC$ . Требуется доказать, что  $AB < AC$ .—Въ  $\triangle ABC$  уголъ  $B$  прямой, а противъ прямого угла должна лежать большая сторона (47, 2°); слѣд.,  $AC > AB$ .

2°. Пусть  $AC$  и  $AD$  будутъ двѣ такіа наклонныя къ прямой  $MN$ , которыхъ основанія  $C$  и  $D$  одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, т.-е.  $OB=OD$ ; требуется доказать, что  $AC=AD$ .—Въ тр—кахъ  $ABC$  и  $ABD$  есть общая сторона  $AB$  и сверхъ того  $BC=BD$  (по условію) и  $\angle ABD=\angle ABC$  (какъ углы прямые); значитъ, эти тр—ки равны и потому  $AC=AD$ .

3°. Пусть  $AC$  и  $AE$  будутъ двѣ такіа наклонныя къ прямой  $MN$ , которыхъ основанія неодинаково удалены отъ основанія перпендикуляра; напр., пусть  $BE > BC$ ; требуется доказать, что  $AE > AC$ .—Отложимъ  $BD=BC$  и проведемъ  $AD$ . По доказанному выше  $AD=AC$ . Сравнимъ  $AE$  съ  $AD$ . Уголъ  $ADD$  есть вѣншній по отношенію къ  $\triangle ABD$  и потому онъ больше прямого угла  $ABD$ ; слѣд.,  $\angle ADE$  тупой; въ  $\triangle ADE$  противъ тупого угла должна лежать большая сторона (47, 2°); значитъ,  $AE > AD$  и, слѣд.,  $AE > AC$ .

**56. Обратныя предложенія.** Въ доказанныхъ теоремахъ разсмотрѣны всевозможные случаи относительно разстояній наклонныхъ отъ основанія перпендикуляра; при этомъ получились различные выводы относительно длины наклонныхъ; вслѣдствіе этого обратныя предложенія должны быть вѣрны (48), а именно:

1°. *Кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ;*

2°. *Если двѣ наклонныя равны, то онѣ одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра;*

3°. *Если двѣ наклонныя не равны, то большая изъ нихъ дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*

Предоставляемъ учащимся самимъ доказать эти предложенія (отъ противнаго).

**Замѣчаніе.** Когда говорятъ: „разстояніе точки отъ прямой“, то разумѣютъ „кратчайшее“ разстояніе, т.-е. перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на прямую.

## Равенство прямоугольных треугольников.

**57.** Такъ какъ въ прямоугольныхъ тр—кахъ углы, содержащіеся между катетами, всегда равны, какъ прямые, то:

*Прямоугольные треугольники равны, если:*

1°, катеты одного треугольника соответственно равны катетамъ другого;

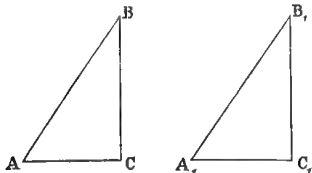
или 2°, катетъ и прилежащій къ нему острый уголъ одного треугольника равны соответственно катету и прилежащему къ нему острому углу другого треугольника.

Эти два признака не требуютъ особаго доказательства, такъ какъ они представляютъ лишь частные случаи общихъ признаковъ (41, 1° и 2°). Укажемъ еще два признака, относящіеся только до прямоугольныхъ треугольниковъ.

**58. Теоремы.** *Прямоугольные треугольники равны, если:*

1°, гипотенуза и острый уголъ одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого;

или 2°, гипотенуза и катетъ одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.



Черт. 44

1°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будутъ два прямоугольные тр—ка, у которыхъ:  $AB = A_1B_1$  и  $A = A_1$ ; требуется доказать, что эти тр—ки равны. — Положимъ  $\triangle ABC$  на  $A_1B_1C_1$  такъ, чтобы у нихъ совместились равныя гипотенузы.

Тогда, по равенству угловъ  $A$  и  $A_1$ , катетъ  $AC$  пойдетъ по  $A_1C_1$ . При этомъ катетъ  $BC$  не можетъ не совмѣститься съ  $B_1C_1$ , потому что въ противномъ случаѣ изъ точки  $B_1$  можно было бы на прямую  $A_1C_1$  опустить два перпендикуляра, что невозможно.

2°. Пусть въ тѣхъ же тр—кахъ будетъ дано:  $AB = A_1B_1$  и  $BC = B_1C_1$ ; требуется доказать, что тр—ки равны. — На-



ложимъ  $\triangle ABC$  на  $\triangle A_1B_1C_1$  такъ, чтобы у нихъ совместились равные катеты  $BC$  и  $B_1C_1$ . Тогда, по равенству прямыхъ угловъ,  $CA$  пойдетъ по  $C_1A_1$ . При этомъ гипотенузы не могутъ не совмѣститься, потому что двѣ равныя наклонныя должны быть одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра  $B_1C_1$ .

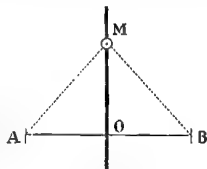
## ГЛАВА IV.

### Свойства перпендикуляра къ срединѣ прямой и биссектрисы угла.

**59. Теоремы.** 1°. Если точка одинаково удалена отъ концовъ прямой, то она лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ этой прямой.

2°. Обратно: если точка лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой, то она одинаково удалена отъ концовъ этой прямой.

1°. Пусть точка  $M$  одинаково удалена отъ концовъ прямой  $AB$ , т.-е.  $MA=MB$ ; требуется доказать, что  $M$  лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой  $AB$ . — Проведемъ биссектрису  $MO$  угла  $AMB$ . Такъ какъ тр.-къ  $AMB$  равнобедренный, то эта биссектриса служитъ въ немъ и перпендикуляромъ къ срединѣ основанія (37); значитъ, точка  $M$  лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой  $AB$ .



Черт. 45

2°. Пусть  $OM$  (черт. 45) будетъ перпендикуляръ къ срединѣ отръзка  $AB$  и  $M$  какая-нибудь точка на немъ; требуется доказать, что эта точка одинаково удалена отъ  $A$  и  $B$ , т.-е. что  $MA=MB$ . — Прямые  $MA$  и  $MB$  суть наклонныя къ  $AB$ , одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра  $MO$ ; а такія наклонныя равны; слѣд.,  $MA=MB$ .

**60. Слѣдствіе.** Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ, прямой и обратной, можно вывести слѣдствіе, что *противоположныя* теоремы также вѣрны (4), т.-е., что

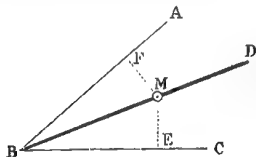
если точка не одинаково удалена отъ концовъ прямой, то она не лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ этой прямой; если точка не лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ прямой, то она не одинаково удалена отъ концовъ этой прямой.

Предлагамъ учащимся самимъ доказать эти противоположныя предложенія разсужденіемъ отъ противнаго.

**61. Теоремы.** 1°. Если точка одинаково удалена отъ сторонъ угла, то она лежитъ на его биссектриссѣ.

2°. Обратно: если точка лежитъ на биссектриссѣ угла, то она одинаково удалена отъ его сторонъ.

1°. Пусть точка  $M$  одинаково удалена отъ сторонъ угла  $ABC$ , т.-е. перпендикуляры  $ME$  и  $MF$ , опущенные изъ этой точки на стороны угла, равны; требуется доказать, что точка



Черт. 46

$M$  лежитъ на биссектриссѣ угла  $ABC$ . — Соединимъ  $M$  съ  $B$ . Прямоугольные тр.-ки  $MBE$  и  $MBF$  равны, такъ какъ у нихъ общая гипотенуза, и катеты  $ME$ ,  $MF$  равны по условію. Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ, что  $\angle MBE = \angle MBF$ , т.-с. прямая  $MB$  есть биссектрисса угла  $ABC$ .

2°. Пусть  $BD$  (черт. 46) есть биссектрисса угла  $ABC$ , и  $M$  какая-нибудь точка на ней; требуется доказать, что перпендикуляры  $ME$ ,  $MF$ , опущенные изъ этой точки на стороны угла, равны. — Прямоугольные тр.-ки  $MBE$  и  $MBF$  равны, такъ какъ у нихъ общая гипотенуза, и углы  $MBE$ ,  $MBF$  равны по условію. Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ, что  $ME = MF$ .

**62. Слѣдствіе.** Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ, прямой и обратной, можно вывести слѣдствіе, что *противоположныя* теоремы также вѣрны, т.-е. что

если точка не одинаково удалена отъ сторонъ угла, то она не лежитъ на его биссектриссѣ;

если точка не лежит на биссектрисе угла, то она не одинаково удалена от сторон его.

**63. Геометрическое мѣсто.** Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, обладающихъ нѣкоторымъ свойствомъ, наз. такая линия, или совокупность линий, или поверхность, которая содержитъ въ себѣ всѣ точки, обладающія этимъ свойствомъ, и не содержитъ ни одной точки, не обладающей имъ.

Изъ теоремъ предыдущихъ параграфовъ слѣдуетъ:

*Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть перпендикуляръ къ срединѣ прямой, соединяющей эти точки.*

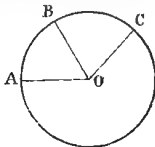
*Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ сторонъ угла, есть биссектриса этого угла.*

## ГЛАВА V.

### Основные задачи на построение.

**64.** Теоремы, доказанные нами въ предыдущихъ главахъ, позволяютъ рѣшать нѣкоторыя задачи на построение. Замѣтимъ, что въ элементарной геометріи рассматриваются только такія построения, которые могутъ быть выполнены помощью линейки и циркуля (употребленіе наугольника и нѣкоторыхъ другихъ приборовъ хотя и допускается ради сокращенія времени, но не составляетъ необходимости). Посредствомъ линейки проводятся прямыя линіи, посредствомъ циркуля чертятся окружности. Свойства этой линіи мы рассмотримъ впоследствии, теперь же ограничимся только общимъ понятіемъ объ ней.

Если дадимъ циркулю произвольное раствореніе и, поставивъ его ножку съ остриемъ въ какую-нибудь точку  $O$ , станемъ вращать циркуль вокругъ этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашемъ или перомъ, опишетъ непрерывную линію, которой всѣ точки одина-

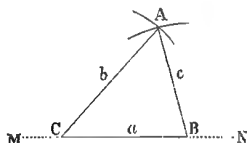


Черт. 47

ково удалены от точки  $O$ . Эта линия наз. *окружностью*, а точка  $O$  — *центромъ* ся. Прямая  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , соединяющія центръ съ какими-нибудь точками окружности, наз. *радіусами*. Всѣ радіусы одной окружности равны между собою. Часть окружности, напр.  $AB$  (черт. 47), наз. *дугою*.

**65.** Укажемъ теперь рѣшеніе основныхъ задачъ на построение.

**Задача 1.** Построить треугольникъ по даннымъ его сторонамъ  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

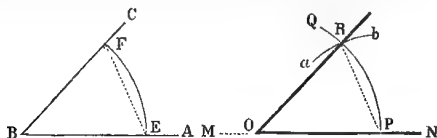


Черт. 48

сѣкаются, соединяемъ съ  $B$  и  $C$ . Треугольникъ  $ABC$  будетъ искомымъ.

Замѣтимъ, что не всякіе три отрезки прямой могутъ служить сторонами треугольника; для этого необходимо, чтобы ни одинъ изъ нихъ не былъ больше суммы двухъ остальныхъ (49).

**Задача 2.** На данной прямой  $MN$  при данной на ней точкѣ  $O$  построить уголъ, равный данному углу  $ABC$ .



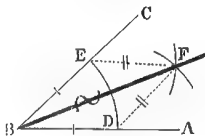
Черт. 49

Изъ вершины  $B$ , какъ центра, описываемъ произвольнымъ радіусомъ между сторонами даннаго угла дугу  $EF$ ; затѣмъ,

не измѣняя растворенія циркуля, переносимъ его остріе въ точку  $O$  и описываемъ дугу  $PQ$ . Далѣе, изъ точки  $P$ , какъ центра, описываемъ дугу  $ab$  радіусомъ, равнымъ вспомо-  
гательной прямой  $EF$ . Наконецъ, черезъ точки  $O$  и  $R$  (пере-  
сѣченіе двухъ дугъ) проводимъ прямую. Уголъ  $ROP$  равенъ  
углу  $ABC$ , потому что тр.-ки  $ROP$  и  $FBE$ , имѣя соответ-  
ственно равныя стороны, равны.

**Задача 3.** Раздѣлитъ данный уголъ  $ABC$  пополамъ.

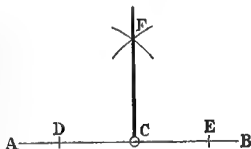
Изъ вершины  $B$ , какъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ между сторонами угла дугу  $DE$ . Затѣмъ изъ точекъ  $D$  и  $E$ , какъ цент-  
ровъ, описываемъ *однимъ и тѣмъ же* растворомъ циркуля небольшія  
дуги, которыя пересѣклись бы въ какой-нибудь точкѣ  $F$ . Прямая  $BF$   
будетъ биссектрисою угла  $ABC$ . Для доказательства соеди-  
нимъ точку  $F$  съ  $D$  и  $E$ ; тогда получимъ два тр.-ка  $BDF$   
и  $BEF$ , которые равны, такъ какъ у нихъ  $BF$  общая сто-  
рона,  $BD=BE$  и  $DF=EF$  по построению. Изъ равенства  
тр.-ковъ слѣдуетъ:  $\angle ABF=\angle CBF$ .



Черт. 50

**Задача 4.** Изъ данной точки  $C$  прямой  $AB$  возставитъ къ ней перпендикуляръ.

Отложимъ на  $AB$  по обѣ  
стороны отъ данной точки  $C$   
равные отрезки (произвольной  
длины)  $CD$  и  $CE$ . Изъ точекъ  
 $E$  и  $D$  однимъ и тѣмъ же рас-  
твореніемъ циркуля (большимъ  
 $CD$ ) опишемъ двѣ небольшія  
дуги, которыя пересѣклись бы  
въ некоторой точкѣ  $F$ . Прямая

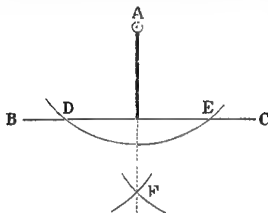


Черт. 51

$CF$  будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ  
видно изъ построенія, точка  $F$  одинаково удалена отъ  $D$   
и  $E$ ; слѣд., она должна лежать на перпендикулярѣ къ сре-  
динѣ отрезка  $DE$  (59); но середина этого отрезка есть  $C$ ;  
значитъ,  $FC \perp DE$ .

**Задача 5.** Изъ данной точки  $A$  опустить перпендикуляръ на данную прямую  $BC$ .

Изъ точки  $A$ , какъ центра, произвольнымъ растворомъ циркуля опишемъ такую дугу, которая пересѣклась бы съ  $BC$  въ какихъ-нибудь двухъ точкахъ  $D$  и  $E$ . Затѣмъ изъ этихъ точекъ произвольнымъ, но однимъ и тѣмъ же растворомъ

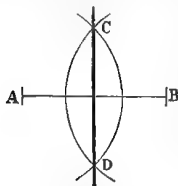


Черт. 52

циркуля проводимъ двѣ небольшія дуги, которыя пересѣклись бы между собою въ некоторой точкѣ  $F$ . Прямая  $AF$  будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ видно изъ построения, каждая изъ точекъ  $A$  и  $F$  одинаково удалена отъ  $D$  и  $E$ ; а такіе точки лежатъ на перпендикулярѣ къ срединѣ отрезка  $DE$  (59).

**Задача 6.** Провести перпендикуляръ къ срединѣ данной конечной прямой  $AB$ .

Изъ точекъ  $A$  и  $B$  произвольнымъ, но одинаковымъ, растворомъ циркуля описываемъ двѣ дуги, которыя пересѣклись бы между собою въ некоторыхъ точкахъ  $C$  и  $D$ . Прямая  $CD$  будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ видно изъ построения, каждая изъ точекъ  $C$  и  $D$  одинаково удалена отъ  $A$  и  $B$ ; слѣд., эти точки должны лежать на перпендикулярѣ къ срединѣ отрезка  $AB$  (59).



Черт. 53

**Задача 7.** Раздѣлить пополамъ данную конечную прямую  $AB$  (черт. 53).

Рѣшается такъ же, какъ предыдущая задача.

**66.** При помощи этихъ основныхъ задачъ можно рѣшать задачи болѣе сложныя. Для примѣра рѣшимъ слѣдующую задачу:

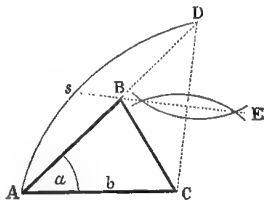
**Задача.** Построить треугольникъ, зная его основаніе  $b$ ,

уголъ  $a$ , прилежащій къ основанію, и сумму  $s$  двухъ боковыхъ сторонъ.

Чтобы составить планъ рѣшенія, предположимъ, что задача рѣшена, т. е. найдемъ такой тр.-никъ  $ABC$  (черт. 54), у котораго основаніе  $AC=b$ , уголъ  $A=a$  и  $AB+BC=s$  (гдѣ  $b$ ,  $a$  и  $s$  суть данныя величины, не помѣщенные у насъ на чертежѣ). Рассмотримъ теперь полученный чертежъ. Сторону  $AC$ , равную  $b$ , и уголъ  $A$ , равный  $a$ , мы построить умѣемъ. Значитъ, остается найти на сторонѣ угла  $A$  такую точку  $B$ , чтобы сумма  $AB+BC$  равнялась  $s$ .

Продолживъ  $AB$ , отложимъ  $AD$ , равную  $s$ . Теперь, очевидно, вопросъ приводится къ тому, чтобы на прямой  $AD$  отыскать такую точку  $B$ , которая была бы одинаково удалена отъ  $C$  и  $D$ . Такая точка, какъ мы знаемъ (59), должна лежать на перпендикулярѣ къ серединѣ отрезка  $CD$ . Этотъ перпендикуляръ мы построимъ умѣемъ. Точка  $B$  найдется въ пересѣченіи перпендикуляра съ  $AD$ .

Итакъ, вотъ рѣшеніе задачи: строимъ уголъ  $A$ , равный данному углу  $a$ ; на сторонахъ его откладываемъ  $AC=b$  и  $AD=s$ . Черезъ середину разстоянія  $DC$  проводимъ перпендикуляръ  $BE$ ; пересѣченіе его съ  $AD$ , т. е. точку  $B$ , соединяемъ съ  $C$ . Тр.-никъ  $ABC$  будетъ искомымъ, такъ какъ онъ удовле-



Ч. рт. 54

творяетъ всѣмъ требованіямъ задачи: у него  $AC=b$ ,  $\angle A=a$  и  $AB+BC=s$ , потому что  $BD=BC$ .

Разсматривая построеніе, мы замѣчаемъ, что задача возможна не при всякихъ данныхъ. Дѣйствительно, если сумма  $s$  задана слишкомъ малою относительно  $b$ , то перпендикуляръ  $EB$  можетъ и не пересѣчь отрезка  $AD$  (пересѣчь его продолженіе за точку  $A$ ); въ этомъ случаѣ задача будетъ невозможна. И независимо отъ построенія можно видѣть, что задача невозможна, если  $s \leq b$ , потому что не можетъ быть

такого треугольника, у котораго сумма двухъ сторонъ была бы равна или меньше третьей стороны.

Въ томъ случаѣ, когда задача возможна, она имѣетъ только одно *рѣшеніе*, т.-е. существуетъ только одинъ тр.-никъ, удовлетворяющій требованіямъ задачи, такъ какъ пересѣченіе перпендикуляра  $BE$  съ прямой  $AD$  можетъ быть только въ одной точкѣ.

**67. Замѣчаніе.** Изъ приведеннаго примѣра видно, что рѣшеніе сложной задачи на построеніе состоитъ изъ слѣдующихъ четырехъ частей:

1°. Предположивъ, что задача рѣшена, дѣлають отъ руки приблизительный чертежъ искомой фигуры и затѣмъ, внимательно разсматривая начерченную фигуру, стремятся найти такія зависимости между данными задачи и искомыми, которыя позволили бы свести задачу на другія, извѣстныя рѣшеніе. Эта самая важная часть рѣшенія задачи (имѣющая цѣлью составить *планъ* рѣшенія) носитъ названіе *анализа*.

2°. Когда такимъ образомъ планъ рѣшенія найденъ, выполняютъ сообразно ему *построеніе*.

3°. Для провѣрки правильности плана *доказываютъ* затѣмъ, на основаніи извѣстныхъ теоремъ, что полученная фигура удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи. Эта часть рѣшенія называется *синтезомъ*.

4°. Затѣмъ задаются вопросомъ, при всякихъ ли данныхъ задача возможна и допускаетъ ли она одно рѣшеніе, или нѣсколько. Эта часть рѣшенія наз. *ислѣдованіемъ* задачи.

Когда задача весьма проста и не можетъ быть сомнѣнія относительно ея возможности, то обыкновенно анализъ и исслѣдованіе опускають, а указываютъ прямо построеніе и приводятъ доказательство. Такъ мы дѣлали, излагая рѣшеніе первыхъ 7-ми задачъ этой главы; такъ же будемъ дѣлать и впослѣдствіи, когда намъ придется излагать рѣшеніе несложныхъ задачъ.



## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

### Доказать теоремы:

5. Въ равнобедренномъ треугольникѣ двѣ медианы равны, двѣ биссектриссы равны, двѣ высоты равны.

6. Если изъ середины каждой изъ равныхъ сторонъ равноб. тр-ка возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ другою изъ равныхъ сторонъ, то эти перпендикуляры равны.

7. Перпендикуляры, возстановленные къ двумъ сторонамъ угла на равныхъ разстояніяхъ отъ вершины, пересѣкаются на биссектриссѣ.

8. Прямая, перпендикулярная къ биссектриссѣ угла, отсѣкаетъ отъ его сторонъ равные отрѣзки.

9. Медиана тр-ка меньше его периметра, но больше полупериметра.

10. Медиана тр-ка меньше полусуммы сторонъ, между которыми она заключается. *Указаніе:* продолжитъ медиану на разстояніе, равное ей, полученную точку соединитъ съ однимъ концомъ стороны, къ которой проведена медиана, и рассмотримъ образовавшуюся фигуру)

11. Сумма разстояній какой-нибудь точки, взятой внутри тр-ка, отъ трехъ его вершинъ меньше периметра, но больше полупериметра.

12. Доказать прямо, что всякая точка, не лежащая на перпендикулярѣ къ среднѣ отрѣзка прямой, неодинаково удалена отъ концовъ этого отрѣзка.

13. Доказать прямо, что всякая точка, не лежащая на биссектриссѣ угла, неодинаково отстоитъ отъ сторонъ его.

### Задачи на построеніе:

14. Построить сумму двухъ, трехъ и болѣе данныхъ угловъ.

15. Построить разность двухъ угловъ.

16. По данной суммѣ и разности двухъ угловъ найти эти углы.

17. Раздѣлить уголъ на 4, 8, 16 равныхъ частей.

18. Черезъ вершину даннаго угла провести внѣ его такую прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.

19. Построить  $\triangle$ : а) по двумъ сторонамъ и углу между ними; б) по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ; в) по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ большей изъ нихъ.

20. Построить *равнобедренный*  $\triangle$ : а) по основанію и боковой сторонѣ; б) по основанію и прилежащему углу; в) по боковой сторонѣ и углу при вершинѣ; г) по боковой сторонѣ и углу при основаніи.

21) Построить *прямоугольный*  $\triangle$ : а) по двум катетам; б) по катету и гипотенузѣ; в) по катету и прилежащему острому углу.

22) Построить *равнобедренный*  $\triangle$ : а) по высотѣ и боковой сторонѣ; б) по высотѣ и углу при вершинѣ; в) по основанію и перпендикуляр, опущенному изъ конца основанія на боковую сторону.

23) Построить *прямоугольный*  $\triangle$  по гипотенузѣ и острому углу.

24. Черезъ точку, данную внутри или внѣ угла, провести такую прямую, которая отсѣкала бы отъ сторонъ угла равныя части.

25. По данной суммѣ и разности двухъ прямыхъ найти эти прямыя.

26. Раздѣлить данную конечную прямую на 4, 8, 16 равныхъ частей.

27. На данной прямой найти точку, одинаково удаленную отъ двухъ данныхъ точекъ (внѣ прямой).

28. Найти точку, равноотстоящую отъ трехъ вершинъ  $\triangle$ .

29. На прямой, пересѣкающей стороны угла, найти точку, одинаково удаленную отъ сторонъ этого угла.

30. Найти точку, одинаково удаленную отъ трехъ сторонъ  $\triangle$ .

31. На данной прямой  $AB$  найти такую точку  $C$ , чтобы прямая  $CM$  и  $CN$ , проведенныя изъ  $C$  къ даннымъ точкамъ  $M$  и  $N$ , расположеннымъ по одну сторону отъ  $AB$ , составляли съ прямыми  $CA$  и  $CB$  равныя углы.

32. Построить *прямоугольный*  $\triangle$  по катету и суммѣ гипотенузы съ другимъ катетомъ.

33. Построить  $\triangle$  по основанію, углу, прилежащему къ основанію, и разности двухъ другихъ сторонъ (разсмотрѣть два случая: 1) когда данъ *меньшій* изъ двухъ угловъ, прилежащихъ къ основанію, 2) когда данъ *большій* изъ нихъ).

34. Построить *прямоугольный*  $\triangle$  по катету и разности двухъ другихъ сторонъ.

35. То же—по гипотенузѣ и суммѣ катетовъ.

36. То же—по гипотенузѣ и разности катетовъ.

## ГЛАВА VI.

### Параллельныя прямыя.

#### Основныя теоремы.

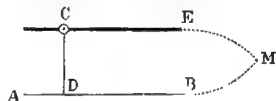
**88. Опредѣленіе.** Двѣ прямыя наз. *параллельными*, если, находясь въ одной плоскости, онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.

Возможность существованія такихъ прямыхъ доказывается слѣдующей теоремой.

**69. Теорема.** *Черезъ всякую точку внѣ прямой можно провести параллельную этой прямой.*

Пусть  $AB$  прямая и  $C$  какая-нибудь точка внѣ ея; требуется доказать, что черезъ  $C$  можно провести прямую, параллельную  $AB$ .—Опустимъ на  $AB$  изъ точки  $C$  перпендикуляръ  $CD$  и затѣмъ проведемъ  $CE \perp CD$ , что всегда возможно сдѣлать (19). Прямая  $CE$  будетъ параллельна  $AB$ .

Для доказательства допустимъ, противное, т.-е. что  $CE$  пересѣкается съ  $AB$  въ пѣкоторой точкѣ  $M$ . Тогда изъ точки  $M$  къ прямой  $CD$  мы имѣли бы два перпендикуляра  $MD$  и  $MC$ , что невозможно; значитъ,  $CE$  не можетъ пересѣкаться съ  $AB$ , т.-е.  $CE$  параллельна  $AB$ .



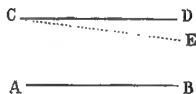
Черт. 55

**70. Слѣдствіе.** *Два перпендикуляра ( $CE$  и  $DB$ , черт. 55) къ одной прямой ( $CD$ ) параллельны.*

**71. Замѣчаніе.** Что прямая  $AB$  параллельна прямой  $CD$ , выражаютъ на письмѣ такъ:  $AB \parallel CD$ .

**72. Аксиома параллельныхъ линий.** *Черезъ одну и ту же точку нельзя провести двухъ различныхъ прямыхъ, параллельныхъ одной и той же прямой.*

Такъ, если черезъ точку  $C$  проведена прямая  $CD$ , параллельная  $AB$ , то всякая другая прямая  $CE$ , проведенная черезъ точку  $C$ , пересѣчется при продолженіи съ  $AB$ .



Черт. 56

Всѣ попытки доказать эту не исполнѣ очевидную истину остались безуспѣшными; поэтому ее принимаютъ безъ доказательства, какъ допущеніе (*postulatum*).

**73. Слѣдствія.** 1°. *Если прямая ( $CE$ , черт. 56) пересѣкается съ одной изъ параллельныхъ ( $CD$ ), то она пересѣкается и съ другой ( $AB$ ),*

потому что въ противномъ случаѣ черезъ одну и ту же точку  $C$  проходили бы двѣ прямыхъ, параллельныхъ  $AB$ , что невозможно.

2°. Если две прямые ( $A$  и  $B$ , черт. 57) параллельны третьей прямой ( $C$ ), то они параллельны между собою.

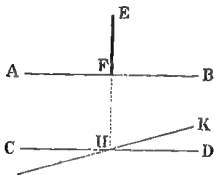


Черт. 57

Действительно, если предположимъ, что  $A$  и  $B$  пересекаются въ некоторой точкѣ  $M$ , то тогда черезъ эту точку проходили бы двѣ прямыя, параллельныя  $C$ , что невозможно.

**74. Теорема.** Если прямая перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ прямыхъ, то она перпендикулярна къ другой параллельной.

Пусть  $AB \parallel CD$  и  $EF \perp AB$ ; требуется доказать, что  $EF \perp CD$ .—Перпендикуляръ  $EF$ , пересекаясь съ  $AB$ , непременно пересѣчетъ и  $CD$  (73, 1°). Пусть точка пересѣченія бу-



Черт. 58

детъ  $H$ . Предположимъ теперь, что  $CD$  не перпендикулярна къ  $EH$ . Тогда какая-нибудь другая прямая, напр.  $HK$ , будетъ перпендикулярна къ  $EH$  и, слѣд., черезъ одну и ту же точку  $H$  будутъ проходить двѣ прямыя, параллельныя  $AB$ : одна  $CD$ , по условію, а другая  $HK$  по доказанному выше (70); такъ какъ это невоз-

можно, то нельзя допустить, чтобы  $CD$  была не перпендикулярна съ  $EH$ .

**75. Опрежденія.** Когда какія-либо двѣ прямыя  $AB$  и  $CD$  (черт. 59) пересѣчены третьей прямой  $MN$ , то образовавшіеся при этомъ углы получаютъ попарно слѣдующія названія: соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7; внутренніе накрестъ лежащіе углы: 3 и 5, 4 и 6; внѣшніе накрестъ лежащіе углы: 1 и 7, 2 и 8; внутренніе односторонніе углы: 3 и 6, 4 и 5; внѣшніе односторонніе углы: 1 и 8, 2 и 7.

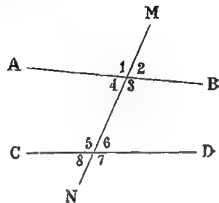
**76. Теоремы.** Если две параллельныя прямыя пересѣчены третьей прямой, то:

- 1° *внутренніе накрестъ лежащіе углы равны;*
- 2° *опяніе накрестъ лежащіе углы равны;*
- 3° *соотвѣтственные углы равны;*
- 4° *сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна  $2d$ ;*
- 5° *сумма внешнихъ одностороннихъ угловъ равна  $2d$ .*

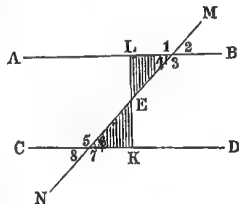
Пусть прямыя  $AB$  и  $CD$  (черт. 60) параллельны и пересѣчены третьей прямою  $MN$ ; требуется доказать, что:

- 1°  $\angle 4 = \angle 6$  и  $\angle 3 = \angle 5$
- 2°  $\angle 2 = \angle 8$  и  $\angle 1 = \angle 7$
- 3°  $\angle 2 = \angle 6$ ,  $\angle 1 = \angle 5$ ,  $\angle 3 = \angle 7$ ,  $\angle 4 = \angle 8$
- 4°  $\angle 3 + \angle 6 = 2d$  и  $\angle 4 + \angle 5 = 2d$
- 5°  $\angle 2 + \angle 7 = 2d$  и  $\angle 1 + \angle 8 = 2d$ .

1° Изъ середины  $E$  отрезка прямой  $MN$ , заключеннаго между параллельными прямыми, опустимъ на  $CD$  перпендикуляръ  $EK$  и продолжимъ его до пересѣченія съ  $AB$  въ точкѣ  $L$ . Такъ какъ перпендикуляръ къ одной изъ параллельныхъ есть также перпендикуляръ и къ другой параллельной, то образовавшіеся при этомъ треугольники (покрыты на чертежѣ штрихами) будутъ оба прямоугольные. Они равны, потому что имѣютъ по равной гипотенузѣ и по равному острому углу при точкѣ  $E$ . Изъ равенства тр.—ковъ слѣдуетъ, что внутренніе накрестъ лежащіе углы 4 и 6 равны. Два другіе внутр. накр. лежащіе углы 3 и 5 равны, какъ дополненія до  $2d$  къ равнымъ угламъ 4 и 6.



Черт. 59



Черт. 60

2°. Внешние накрестъ лежащіе углы равны соответственно внутреннимъ накр. лежащимъ угламъ, какъ углы вертикальные; такъ, уг. 2 = уг. 4 и уг. 8 = уг. 6; но, по доказанному, уг. 4 = уг. 6; слѣд., уг. 2 = уг. 8.

3°. Соответственные углы 2 и 6 равны, потому что уг. 2 = уг. 4, а уг. 4 = уг. 6. Такъ же убѣдимся въ равенствѣ другихъ соответственныхъ угловъ.

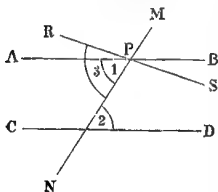
4°. Сумма внут. одностороннихъ угловъ 3 и 6 равна  $2d$  потому, что сумма смежныхъ угловъ 3 и 4 равна  $2d$ , а уг. 4 можетъ быть замѣненъ равнымъ ему угломъ 6. Такъ же убѣдимся, что сумма угловъ 4 и 5 равна  $2d$ .

5°. Сумма внешнихъ одностороннихъ угловъ равна  $2d$  потому, что эти углы равны соответственно внутреннимъ одностороннимъ угламъ, какъ углы вертикальные.

**§ 3. Обратныя теоремы.** Если при пересеченіи двухъ прямыхъ какою-нибудь третьею прямою:

- 1° внутренние накрестъ лежащіе углы равны;
  - или 2° внешние накрестъ лежащіе углы равны;
  - или 3° соответственные углы равны;
  - или 4° сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна  $2d$ ;
  - или 5° сумма внешнихъ одностороннихъ равна  $2d$ ,
- то такія прямыя параллельны.

Всѣ эти предложенія легко доказываются отъ противнаго.



Черт. 61

1°. Пусть внутр. накр. лежащіе углы 1 и 2 равны; требуется доказать, что  $AB \parallel CD$ . — Предположимъ, что линіей, параллельной  $CD$  и проходящей через точку  $P$ , будетъ не  $AB$ , а какая-нибудь иная прямая  $RS$ . Тогда, вслѣдствіе параллельности этихъ линій, мы получимъ, по доказанному равенство: уг. 3 = уг. 2; но по условію уг. 1 = уг. 2; слѣд., уг. 3 = уг. 1, что невозможно.

Подобное же разсужденіе примѣняется во всѣхъ остальныхъ случаяхъ.

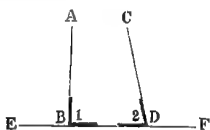
**§ 8. Слѣдствіе.** Если сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ не равна  $2d$ , то прямыя при достаточномъ продолженіи пересѣкаются, такъ какъ, если бы прямыя не пересѣкались, то онѣ были бы параллельны, и тогда сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равнялась бы  $2d$ .

Это предположеніе было допущено греческимъ геометромъ *Эвклидомъ* (жившимъ въ III вѣкѣ до Р. Хр.) безъ доказательства, какъ аксіома параллельныхъ линій. Въ настоящее время предпочитаютъ принимать за такую аксіому болѣе простую истину, изложенную выше въ § 72.

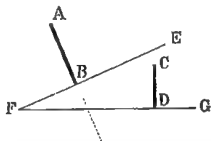
**§ 9.** Полезно замѣтить еще слѣдующіе два признака параллельности прямыхъ.

1°. Перпендикуляръ ( $AB$ , черт. 62) и наклонная ( $CD$ ) къ одной и той-же прямой ( $EF$ ) при продолженіи пересѣкаются,

потому что сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ 1 и 2 не равна  $2d$ .



Черт. 62



Черт. 63

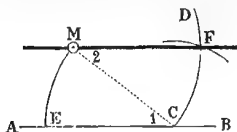
2°. Двѣ прямыя ( $AB$  и  $CD$ , черт. 63), перпендикулярныя къ двумъ пересѣкающимся прямымъ ( $FE$  и  $FG$ ), при продолженіи пересѣкаются.

Дѣйствительно, если предположимъ, что  $AB \parallel CD$ , то прямая  $FD$ , будучи перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ (къ  $CD$ ), была бы перпендикулярна и къ другой параллельной (къ  $AB$ ), и тогда изъ одной точки  $F$  къ прямой  $AB$  были бы проведены два перпендикуляра:  $FB$  и  $FD$ , что невозможно.

**§ 10. Задача.** Черезъ данную точку  $M$  провести прямую, параллельную данной прямой  $AB$  (черт. 64).

Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи состоитъ въ слѣдующемъ: изъ точки  $M$ , какъ центра, описываемъ произволь-

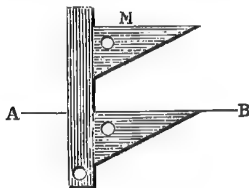
нымъ радиусомъ дугу  $CD$  и изъ точки  $C$  тѣмъ же радиусомъ дугу  $ME$ . Затѣмъ, давъ циркулю раствореніе, равное разстоянію отъ  $E$  до  $M$ , описываемъ изъ точки  $C$  небольшую



Черт. 64

дугу, которая пересѣкалась бы съ  $CD$  въ некоторой точкѣ  $F$ . Прямая  $MF$  будетъ параллельна  $AB$ .— Для доказательства проведемъ  $MC$ ; образовавшіеся при этомъ углы 1 и 2 равны по построенію (65, зад. 2); а если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны, то линіи параллельны.

Параллельныя прямыя весьма удобно проводятся также помощью наугольника и линейки. Приставивъ наугольникъ



Черт. 65

одною стороною прямого угла къ данной прямой  $AB$ , прикладываютъ къ другой его сторонѣ линейку; затѣмъ, придерживая линейку въ этомъ положеніи, двигаютъ наугольникъ вдоль нея до тѣхъ поръ, пока сторона его, совпадавшая съ  $AB$ , не будетъ проходить черезъ точку  $M$ ; послѣ чего проводятъ вдоль этой стороны пря-

мую. Эта прямая будетъ параллельна  $AB$ , такъ какъ обѣ прямыя перпендикулярны къ краевой линіи линейки.

## Углы съ соотвѣтственно параллельными или перпендикулярными сторонами.

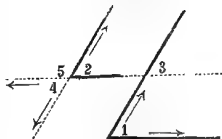
**§1. Теорема.** Если стороны одного угла соотвѣтственно параллельны сторонамъ другого угла, то такіе углы или равны, или въ суммѣ составляютъ два прямыхъ.

Разсмотримъ особо три случая (черт. 66).

1°. Пусть стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 2 и, сверхъ того, имѣютъ одинаковое направленіе отъ



вершины (на чертежѣ паправленія указаны стрѣлками). — Продолживъ одну изъ сторонъ угла 2 до пересѣченія съ непараллельной ей стороной угла 1, мы получимъ уголъ 3, равный и углу 1, и углу 2 (какъ соответственные при параллельныхъ); слѣд.  $\angle 1 = \angle 2$ .



Черт. 66

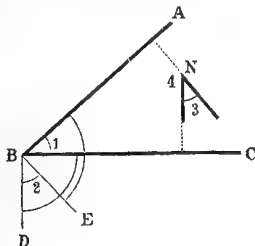
2°. Пусть стороны угла 1 соответственно параллельны сторонамъ угла 4, но имѣютъ *противоположное* направление отъ вершины. — Продолживъ обѣ стороны угла 4, мы получимъ уг. 2, который равенъ углу 1 (по доказанному выше) и углу 4 (какъ вертикальные); слѣд.  $\angle 4 = \angle 1$ .

3°. Пусть, наконецъ, стороны угла 1 соответственно параллельны сторонамъ угла 5, причемъ двѣ изъ этихъ сторонъ имѣютъ одинаковое направление, а двѣ другія противоположное. Продолживъ одну сторону угла 5, мы получимъ уг. 2, который равенъ, по доказанному, углу 1; но  $\angle 5 + \angle 2 = 2d$  (по свойству смежныхъ угловъ); слѣд. и  $\angle 5 + \angle 1 = 2d$ .

Такимъ образомъ углы съ параллельными сторонами оказываются равными, когда ихъ стороны имѣютъ или одинаковое, или противоположное направление; если же это условіе не выполнено, то углы составляютъ въ суммѣ  $2d$ .

**§2. Теорема.** Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны къ сторонамъ другого угла, то такіе углы или равны, или въ суммѣ составляютъ два прямыхъ.

Пусть уголъ  $ABC$ , обозначенный цифрою 1, есть одинъ изъ данныхъ угловъ. Проведемъ изъ его вершины двѣ вспомогательныя прямыя:  $BD \perp BC$  и  $BE \perp BA$ . Образованный ими уголъ 2 равенъ углу 1 по слѣдующей причинѣ: углы  $DBC$  и  $EBA$  равны, такъ какъ оба



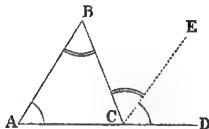
Черт. 67

ино прямые; отнявъ отъ каждаго изъ нихъ по одному и тому же углу  $EBC$ , получимъ:  $\angle 2 = \angle 1$ . Теперь вообразимъ, что при какой-нибудь точкѣ  $N$  намъ данъ уголъ 3, или уголъ 4, у котораго стороны соответственно перпендикулярны къ сторонамъ угла 1. Тогда стороны этого угла будутъ параллельны сторонамъ угла 2 (потому что два перпендикулара къ одной прямой параллельны); слѣд., уголъ при точкѣ  $N$  или равенъ углу 2, или составляетъ съ нимъ въ суммѣ  $2d$ . Замѣнивъ уг. 2 равнымъ ему угломъ 1, получимъ то, что требовалось доказать.

### Сумма угловъ треугольника и многоугольника.

**§3. Теорема.** Сумма угловъ треугольника равна двумъ прмымъ.

Пусть  $ABC$  какой-нибудь треугольникъ; требуется доказать, что сумма угловъ  $A$ ,  $B$  и  $C$  равна  $2d$ .



Черт. 68.

Продолживъ сторону  $AC$  и проведя  $CE \parallel AB$ , найдемъ:  $\angle A = \angle ECD$  (какъ углы соответственные при параллельныхъ),  $\angle B = \angle BCE$  (какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ); слѣд.:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= \angle ECD + \\ &+ \angle BCE + \angle C = 2d. \end{aligned}$$

**§4. Слѣдствія.** 1°. Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ, не смежныхъ съ нимъ (такъ,  $\angle BCD = \angle A + \angle B$ ).

2°. Если два угла одного треугольника соответственно равны двумъ угламъ другого, то и третьи углы равны.

3°. Сумма двухъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равна одному прямому углу.

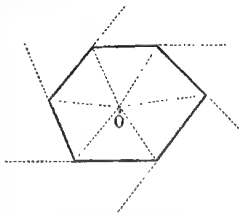
4°. Въ равнобедренномъ прямоугольномъ тр.-ѣ каждый острый уголъ равенъ  $\frac{1}{2}d$ .

5°. Въ равностороннемъ тр.-ѣ каждый уголъ равенъ  $\frac{2}{3}d$ .

**85. Теорема.** Сумма углов выпуклого многоугольника равна доумъ прямыхъ, повтореннымъ столько разъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ двухъ.

Взявъ произвольную точку  $O$  внутри многоугольника, соединимъ ее со всѣми вершинами. Тогда многоугольникъ разобьется на столько тр.-ковъ, сколько въ немъ сторонъ. Сумма угловъ каждаго тр.-ка равна  $2d$ ; слѣд., сумма угловъ всѣхъ тр.-ковъ равна  $2dn$ , если  $n$  означать число сторонъ многоугольника. Эта величина, очевидно, превышаетъ сумму угловъ многоугольника на сумму угловъ, расположенныхъ вокругъ точки  $O$ ; но послѣдняя сумма равна  $4d$ ; слѣд., сумма угловъ многоугольника равна

$$2dn - 4d = 2d(n - 2).$$



Черт. 69.

**86. Слѣдствие.** При данномъ числѣ сторонъ сумма угловъ выпуклаго многоугольника есть величина постоянная. Такъ, во всякомъ выпукломъ четырехугольникѣ сумма угловъ равна  $4d$ , въ пятиугольникѣ она равна  $6d$  и т. п.

**87. Теорема.** Если каждую сторону выпуклаго многоугольника продолжимъ въ одномъ направленіи, то сумма образовавшихся при этомъ внешнихъ угловъ равна четыремъ прямымъ.

Каждый изъ такихъ внешнихъ угловъ (черт. 69) составляетъ дополненіе до  $2d$  къ смежному съ нимъ внутреннему углу многоугольника; слѣд., если къ суммѣ внутреннихъ угловъ приложимъ сумму внешнихъ угловъ, то получимъ  $2dn$  (гдѣ  $n$  число сторонъ); но точно также если къ суммѣ внутреннихъ угловъ приложимъ сумму угловъ при точкѣ  $O$ , то получимъ тоже  $2dn$ ; значитъ, сумма внешнихъ угловъ равна суммѣ угловъ при точкѣ  $O$ , т.-е. равна  $4d$ .

## ГЛАВА VII.

### Параллелограммы и трапеціи.

#### Главѣйшія свойства параллелограммовъ.

**§§. Опредѣленія.** Четыреугольникъ, у котораго противоположныя стороны параллельны, наз. *параллелограммомъ*.

Параллелограммъ, у котораго одинъ изъ угловъ прямой, наз. *прямоугольникомъ*.



Черт. 70

Параллелограммъ, у котораго двѣ сосѣднія стороны равны, наз. *ромбомъ*.

Параллелограммъ, у котораго двѣ сосѣднія стороны равны и одинъ изъ угловъ прямой, наз. *квадратомъ*.

Четыреугольникъ, у котораго двѣ противоположныя стороны параллельны, наз. *трапеціей*. Параллельныя стороны ея наз. *основаніями*.

Возможность существованія перечисленныхъ фигуръ не требуетъ доказательства.

**§§. Теорема.** Во всякомъ параллелограммѣ:

1°, *противоположныя углы равны*;

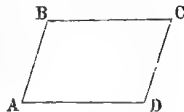
2°, *сумма угловъ, прилежащихъ къ одной сторонѣ, равна двумъ прямымъ*.

Пусть  $ABCD$  (черт. 71) есть параллелограммъ, т.-е.  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$ ; требуется доказать, что:

1°,  $\angle A = \angle C$  и  $\angle B = \angle D$ ;

2°,  $\angle A + \angle B = 2d$ ,  $\angle B + \angle C = 2d$  и т. д.

1°. Углы  $A$  и  $C$  равны, потому что стороны этихъ угловъ соответственно параллельны и имѣютъ противоположное направление отъ вершины (81). То же самое можно сказать объ углахъ  $B$  и  $D$ .



Черт. 71

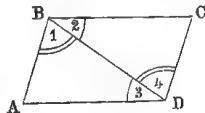
2°. Каждая изъ суммъ:  $A + B$ ,  $B + C$ ,  $C + D$  и  $D + A$  равна  $2d$ , потому что это суммы угловъ внутреннихъ одностороннихъ при параллельныхъ прямыхъ.

**90. Слѣдствіе.** Если въ параллелограммѣ одинъ изъ угловъ прямой, то и остальные углы прямые. — Въ прямоугольнике все углы прямые.

**91. Теорема.** Во всякомъ параллелограммѣ противоположныя стороны равны.

Пусть  $ABCD$  есть параллелограммъ, т.-е.  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$ ; требуется доказать, что  $AB = CD$  и  $BC = AD$ .

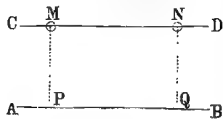
Проведа діагональ  $BD$ , получимъ два тр.-ка  $ABD$  и  $BCD$ , которые равны, потому что у нихъ:  $BD$  общая сторона,  $\angle 1 = \angle 4$  и  $\angle 2 = \angle 3$  (какъ внутренние накрестъ лежащія при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ:  $AB = CD$  и  $AD = BC$  (въ равныхъ тр.-кахъ противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны).



Черт. 72

**92. Слѣдствія.** 1°. Если въ параллелограммѣ две сосѣднія стороны равны, то все стороны равны. — Въ ромбѣ и квадратѣ все стороны равны.

2° *Параллельныя прямыя* ( $AB$  и  $CD$ , черт. 73) *везде* одинаково удалены одна отъ другой.

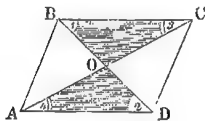


Черт. 73

Дѣйствительно, если изъ какихъ-нибудь двухъ точекъ  $M$  и  $N$  прямой  $CD$  опустимъ на  $AB$  перпендикуляры  $MP$  и  $NQ$ , то эти перпендикуляры параллельны (70) и потому фигура  $MNPQ$  параллелограммъ; отсюда слѣдуетъ, что  $MP = NQ$ .

**93. Теорема.** *Во всякомъ параллелограммѣ діагонали дѣлятся пополамъ.*

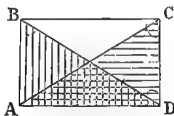
Пусть  $ABCD$  есть параллелограммъ, а  $AC$  и  $BD$  его діагонали; требуется доказать, что  $BO = OD$  и  $AO = OC$ .



Черт. 74

Тр.-ки  $AOB$  и  $DOC$  равны, потому что у нихъ:  $BC = AD$  (какъ противоположныя стороны параллелограмма),  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$  (какъ внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ:  $OB = OD$  и  $OC = OA$ .

**94. Теорема.** *Во всякомъ прямоугольникѣ діагонали равны.*



Черт. 75

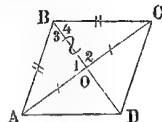
Пусть  $ABCD$  есть прямоугольникъ, а  $AC$  и  $BD$  его діагонали; требуется доказать, что  $AC = BD$ .

Прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $ABD$  равны, потому что у нихъ:  $AD$  общій катетъ и  $AB = CD$  (какъ противоположныя стороны параллелограмма). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ:  $AC = BD$ .

**95. Теорема.** *Во всякомъ ромбѣ діагонали перпендикулярны и дѣлятъ углы ромба пополамъ.*

Пусть  $ABCD$  есть ромбъ, а  $AC$  и  $BD$  его діагонали; требуется доказать, что  $AC \perp BD$  и что каждый изъ угловъ ромба дѣлится діагональю пополамъ.

Тр.-ки  $ABO$  и  $BCO$  равны, потому что у нихъ:  $BO$  общая сторона,  $AB=BC$  (такъ какъ у ромба всѣ стороны равны) и  $AO=OC$  (такъ какъ діагонали всякаго параллелограмма дѣлятся пополамъ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ:  $\angle 1 = \angle 2$ , т.-е.  $BD \perp AC$ , и  $\angle 3 = \angle 4$ .



Черт. 76

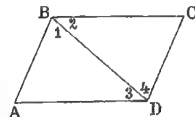
**96. Замѣчаніе.** Такъ какъ квадратъ есть параллелограммъ, прямоугольникъ и ромбъ, то онъ соединяетъ въ себѣ всѣ свойства этихъ фигуръ.

**97. Теорема.** Если у четырехугольника: 1°, противоположныя стороны равны, или 2°, двѣ противоположныя стороны равны и параллельны, то такой четырехугольникъ есть параллелограммъ.

1°. Пусть  $ABCD$  есть четырехугольникъ, у котораго:

$$AB=CD \text{ и } BC=AD.$$

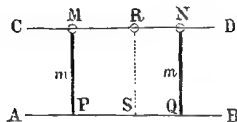
Требуется доказать, что  $ABCD$  есть параллелограммъ, т.-е.  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$ . — Проведи діагональ  $BD$ , получимъ два тр.-ка, которые равны, такъ у нихъ:  $BD$  общая сторона,  $AB=CD$  и  $BC=AD$  (по условію). Изъ равенства ихъ слѣдуетъ:  $\angle 1 = \angle 4$  и  $\angle 2 = \angle 3$  (въ равныхъ тр.-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы), вслѣдствіе этого  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$  (если внутр. накрестъ лежащіе углы равны, то прямая параллельна).



Черт. 77

2°. Пусть въ томъ же четырехугольникѣ дано условіе:  $BC=AD$  и  $BC \parallel AD$ . Требуется доказать, что  $ABCD$  есть параллелограммъ, т.-е. что  $AB \parallel CD$ . — Треугольники  $ABD$  и  $BDC$  равны, потому что у нихъ:  $BD$  общая сторона.  $BC=AD$  (по условію) и  $\angle 2 = \angle 3$  (какъ внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ  $BC$  и  $AD$  и секущей  $BD$ ). Изъ равенства тр.-ковъ слѣдуетъ:  $\angle 1 = \angle 4$ ; поэтому  $AB \parallel CD$ .

**98. Слѣдствіе.** Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ данной прямой и находящихся по одну сторону отъ нея, есть прямая, параллельная данной.



Черт. 78

Дѣйствительно, пусть  $M$  и  $N$  будутъ какія-нибудь двѣ точки, находящіяся по одну сторону отъ прямой  $AB$  и удаленныя отъ нея на одно и то же разстояніе  $m$ , т.-е. перпендикуляры  $MP$  и  $NQ$ , опущенные изъ этихъ точекъ на  $AB$ , равны  $m$ .

Проведемъ черезъ  $M$  и  $N$  прямую  $CD$ . Такъ какъ  $MP = NQ$  и сверхъ того  $MP \parallel NQ$ , то фигура  $MNQP$  есть параллелограммъ; слѣд.,  $CD \parallel AB$ . Такимъ образомъ, всѣ точки, удаленныя отъ  $AB$  на разстояніе  $m$  и расположенныя по верхнюю сторону отъ нея, лежатъ на прямой  $CD$ , параллельной  $AB$ . Обратнo: всякая точка  $R$ , взятая на этой прямой, отстоитъ отъ  $AB$  на столько же, какъ и точки  $M$  и  $N$ , т.-е. на данное разстояніе  $m$  (92, 2°).

**99.** Предлагаемъ самимъ учащимся доказать слѣдующія обратныя теоремы:

1°. Всякій четырехугольникъ, у котораго противоположныя углы равны, есть параллелограммъ.

2°. Всякій четырехугольникъ, у котораго діагонали дѣлятся пополамъ, есть параллелограммъ.

3°. Всякій параллелограммъ, у котораго діагонали равны, есть прямоугольникъ.

4°. Всякій параллелограммъ, у котораго діагонали перпендикулярны, есть ромбъ.

**Нѣкоторые теоремы, основанныя на свойствахъ параллелограмма.**

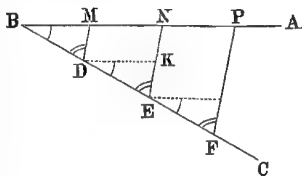
**100. Теорема.** Если на одной сторонѣ угла отложимъ равныя части и черезъ точки дѣленія проведемъ параллельныя прямыя до пересѣченія съ другою стороной угла, то и на этой сторонѣ отложатся равныя части.



Пусть  $ABC$  какой-нибудь уголъ и на его сторонѣ  $BC$  отложены равныя части:  $BD=DE=EF\dots$ . Проведемъ черезъ точки  $D, E, F\dots$  параллельныя прямыя  $DM, EN, FP\dots$  до пересѣченія съ  $AB$ ; требуется доказать, что

$$BM=MN=NP=\dots$$

Проведа  $DK \parallel MN$ , получимъ  $\triangle DKE$ , равный  $\triangle BMD$ , потому что у нихъ:  $BD=DE$  (по условію),  $\angle B=\angle KDE$  (какъ соответственные углы при параллельныхъ  $BM$  и  $DK$  и сѣкущей  $BC$ ) и  $\angle BDM=\angle DEK$  (какъ соответственные углы при параллельныхъ  $DM$  и  $EN$  и сѣкущей  $BC$ ). Изъ равенства тр.-ковъ выводимъ:  $DK=BM$ ; но  $DK=MN$  (какъ противоположныя стороны параллелограмма  $DMNK$ ); потому  $MN=BM$ . Подобнымъ же образомъ докажемъ, что  $NP=BM=MN$  и т. д.



Черт. 79

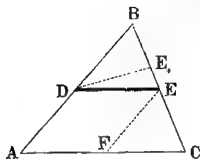
**101. Задача.** Данную прямую раздѣлить на  $n$  равныхъ частей.

Эта задача рѣшается на основаніи предыдущей теоремы.

Пусть  $BP$  (черт. 79) будетъ данная прямая, которую требуется раздѣлить, положимъ, на 3 равныя части. Изъ конца ея  $B$  проводимъ прямую  $BC$ , образующую съ  $BP$  произвольный уголъ; откладываемъ на  $BC$  отъ точки  $B$  три произвольной длины, но равныя между собою, отрѣзка:  $BD, DE$  и  $EF$ ; точку  $F$  соединяемъ съ  $P$ ; наконецъ, изъ  $E$  и  $D$  проводимъ прямыя  $EN, DM$ , параллельныя  $FP$ . Тогда прямая  $BP$ , по доказанному, раздѣлится въ точкахъ  $M$  и  $N$  на три равныя части.

**102. Теорема.** Прямая, соединяющая середины двухъ сторонъ треугольника, параллельна третьей его сторонѣ и равна ея половинѣ.

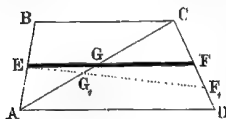
Пусть  $D$  есть середина стороны  $AB$  и  $E$  — середина стороны  $BC$  тр.-ка  $ABC$ ; докажем сначала, что  $DE \parallel AC$ .



Черт. 80

Для доказательства проведем через  $D$  прямую, параллельную  $AC$ ; пусть это будет  $DE_1$ . Так как на сторонѣ  $BA$  угла  $B$  отложены равныя части  $BD = DA$ , и изъ точекъ дѣленія къ другой сторонѣ угла проведены параллельныя прямыя  $DE_1$  и  $AC$ , то (100) на сторонѣ  $BC$  должны отложиться равныя части; значитъ:  $BE_1 = E_1C$ , т.-е. точка  $E_1$  есть середина  $BC$ . Но, по условию, середина  $BC$  есть точка  $E$ ; слѣд.  $E_1$  должна совмѣститься съ  $E$ , и параллельная прямая  $DE_1$  должна слиться съ  $DE$ . Остается теперь доказать, что  $DE = \frac{1}{2}AC$ . Для этого изъ  $E$  проведемъ  $EF \parallel DA$ ; тогда фигура  $EDAF$  будетъ параллелограммъ и, слѣд.,  $DE = AF$ . Такъ какъ на сторонѣ  $CB$  угла  $C$  отложены равныя части  $CE = EB$  и изъ точекъ дѣленія проведены къ другой сторонѣ параллельныя прямыя  $EF$  и  $BA$ , то  $CF = FA$ ; слѣд.  $DE = \frac{1}{2}AC$ .

**103. Теорема.** Прямая, соединяющая середины непараллельныхъ сторонъ трапеции, параллельна основаніямъ трапеции и равна полусуммѣ ихъ.



Черт. 81

Пусть  $E$  есть середина стороны  $AB$  и  $F$  — середина стороны  $CD$  трапеции  $ABCD$ ; требуется доказать, что  $EF \parallel BC$  (и слѣд.  $EF \parallel AD$ ) и кромѣ того, что  $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ .

1°. Проведемъ черезъ  $E$  прямую, параллельную  $BC$ ; пусть это будетъ  $EF_1$ . Тогда, обращая вниманіе на  $\triangle ABC$ , замѣчаемъ, что діагональ  $AC$  должна раздѣлиться въ точкѣ  $G_1$  пополамъ (100), а обращая вниманіе на  $\triangle ACD$ , находимъ, что сторона  $CD$  должна раздѣлиться въ точкѣ  $F_1$  пополамъ. Но середина  $CD$  есть  $F$ ; значитъ,  $F_1$  совмѣщается съ  $F$ , и параллельная прямая  $EF_1$  сливается съ  $EF$ .

2°. Изъ  $\triangle ABC$ , а затѣмъ изъ  $\triangle ACD$  находимъ:  
 $EG = \frac{1}{2} BC$  и  $GF = \frac{1}{2} AD$ ; слѣд.:

$$EF = EG + GF = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} (BC + AD).$$

**Замѣчаніе.** Прямая, соединяющая середины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, наз. *среднею линіей*.

## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

### Доказать теоремы:

37. Соединивъ послѣдовательно середины сторонъ какого-нибудь четырехугольника, получимъ параллелограммъ.

38. Въ прямоугольномъ  $\triangle$  медиана, проведенная къ гипотенузѣ, равна ея половинѣ. (*Указаніе:* слѣдуетъ продолжить медиану на равное разстояніе).

39. Обратно: если медиана равна половинѣ стороны, къ которой она проведена, то тр-никъ прямоугольный.

40. Въ прямоугольномъ  $\triangle$  медиана и высота, проведенныя къ гипотенузѣ, образуютъ уголъ, равный разности острыхъ угловъ  $\triangle$ .

41. Если въ прямоугольномъ  $\triangle$  одинъ острый уголъ равенъ  $\frac{1}{3}d$ , то противоложащій ему катетъ составляетъ половину гипотенузы.

42. Обратно: если катетъ вдвое меньше гипотенузы, то противоложащій ему острый уголъ равенъ  $\frac{1}{3}d$ .

43. Всякая прямая, проведенная внутри параллелограмма черезъ точку пересѣченія діагоналей (черезъ *центр* параллелограмма), дѣлится въ этой точкѣ пополамъ.

44. Всякая прямая, проведенная внутри трапеціи между ея основаніями, дѣлится среднею линіей пополамъ.

45. Выпуклый многоугольникъ не можетъ имѣть болѣе трехъ острыхъ угловъ.

46. Черезъ вершины угловъ  $\triangle$  проведены прямая, параллельная противоположнымъ сторонамъ. Образованный ими  $\triangle$  въ 4 раза болѣе даннаго; каждая сторона его въ 2 раза болѣе соответствующей стороны даннаго  $\triangle$ .

47. Въ равнобедренномъ  $\triangle$  сумма разстояній каждой точки основанія отъ боковыхъ сторонъ есть величина постоянная, а именно она равна высотѣ, опущенной на боковую сторону.

48. Какъ измѣнится эта теорема, если взять точку на продолженіи основанія?

49. Данъ квадратъ  $ABCD$ . На сторонахъ его отложены равныя части:  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  соединены последовательно прямыми. Доказать, что  $A_1B_1C_1D_1$  есть квадратъ.

### Найти геометрическія мѣста:

50. Среднія всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ различнымъ точкамъ данной прямой.

51. Точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ.

52. Вершинъ тр.-ковъ, имѣющихъ общес основаніе и равныя высоты.

### Задачи на построеніе:

53. Даны два угла  $\triangle$ , построить третій.

54. Данъ острый уголъ прямоугольнаго  $\triangle$ ; построить другой острый уголъ.

55. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся отъ нея на данномъ разстояніи.

56. Раздѣлить пополамъ уголъ, вершина котораго не помѣщается на чертежѣ.

57. Черезъ данную точку провести прямую подъ даннымъ угломъ къ данной прямой.

58. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данной длинѣ.

59. Между сторонами даннаго остраго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она была перпендикулярна къ одной сторонѣ угла.

60. Между сторонами даннаго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она отсѣкала отъ сторонъ угла равныя части.

61. Построить прямоугольный  $\triangle$  по даннымъ острому углу и противолежащему катету.

62. Построить  $\triangle$  по двумъ угламъ и сторонѣ, лежащей противъ одного изъ нихъ.

63. Построить равнобедренный  $\triangle$  по углу при вершинѣ и основанію.

64. То же—по углу при основаніи и высотѣ, опущенной на боковую сторону.

65. То же—по боковой сторонѣ и высотѣ, опущенной на нее.

66. Построить равносторонній  $\triangle$  по его высотѣ.

67. Раздѣлитъ прямой уголъ на 3 равныя части (или построить уголъ, равный  $\frac{1}{3}d$ ).

68. Построить  $\triangle$  по основанію, высотѣ и боковой сторонѣ.

69. То же—по основанію, высотѣ и углу при основаніи.

70. То же—по углу и двумъ высотамъ, опущеннымъ на стороны этого угла.

71. То же—по сторонѣ, суммѣ двухъ другихъ сторонъ и высотѣ, опущенной на одну и этихъ сторонъ.

72. То же—по двумъ угламъ и периметру.

73. То же—по высотѣ, периметру и углу при основаніи.

74. Провести въ  $\triangle$  прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы она была равна суммѣ отрезковъ боковыхъ сторонъ, считая отъ основанія.

75. Провести въ  $\triangle$  прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы верхній отрезокъ одной боковой стороны равнялся нижнему отрезку другой боковой стороны.

76. Построить многоугольникъ, равный данному (указаніе: діагоналями не разбиваютъ мп.-никъ на тр.-ки).

77. Построить четырехугольникъ по тремъ его угламъ и двумъ сторонамъ, образующимъ четвертый уголъ (указаніе: падо пайти 4-й уголъ).

78. То же—по тремъ сторонамъ и двумъ діагоналямъ.

79. Построить параллелограммъ по двумъ неравнымъ сторонамъ и одной діагонали.

80. То же—по сторонѣ и двумъ діагоналямъ.

81. То же—по двумъ діагоналямъ и углу между ними.

82. То же—по основанію, высотѣ и діагонали.

83. Построить прямоугольникъ по діагоналямъ и углу между ними.

84. Построить ромбъ по сторонѣ и діагонали.

85. То же—по двумъ діагоналямъ.

86. То же—по высотѣ и діагонали.

87. То же—по углу и діагонали, проходящей черезъ этотъ уголъ.

88. То же—по діагонали и противолежащему углу.

89. То же—по суммѣ діагоналей и углу, образованному діагональю со стороною.

90. Построить квадратъ по данной діагонали.

91. Построить трапецію по основанію, прилежащему къ нему углу и двумъ непараллельнымъ сторонамъ (могутъ быть два рѣшенія, одно и ни одного).

92. То же—по разности основаній, двумъ боковымъ сторонамъ и одной діагонали.

92\*. То же—по четыремъ сторонамъ.

93. То же—по основанію, высотѣ и двумъ діагоналямъ.

94. То же—по двумъ основаніямъ и двумъ діагоналямъ.

95. Построить квадратъ по суммѣ стороны съ діагональю.

96. То же—по разности діагонали и стороны.

97. Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и высотѣ.

98. То же—по сторонѣ, суммѣ діагоналей и углу между ними.

99. Построить  $\triangle$  по двумъ сторонамъ и медианѣ, проведенной къ третьей сторонѣ.

100. То же—по основанію, высотѣ и медианѣ, проведенной къ боковой сторонѣ.

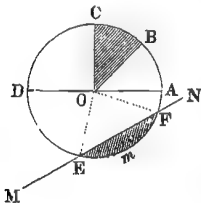
# КНИГА II.

## ОКРУЖНОСТЬ.

### ГЛАВА I.

#### Форма и положеніе окружности.

**104. Определенія.** Окружностью называется замкнутая плоская линия, всѣ точки которой одинаково удалены отъ одной и той же точки  $O$ , называемой *центромъ*. Прямые  $OA$ ,



Черт. 82

$OB, OC, \dots$ , соединяющія центръ съ точками окружности, называются *радіусами*. Неопредѣленная прямая  $MN$ , проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки окружности, называется *сѣкущею*, а часть ея  $EF$ , заключенная между этими точками, наз. *хордою*. Всякая хорда  $AD$ , проходящая черезъ центръ, наз. *діаметромъ*. Какая-нибудь часть окружности, напр.  $EmF$ ,

наз. *дугою*. О хордѣ  $EF$ , соединяющей концы дуги, говорятъ, что она *стягиваетъ* дугу. Дуга обозначается иногда знакомъ  $\frown$ ; напр., пишутъ такъ:  $\frown EmF$ .

Часть плоскости, ограниченная окружностью, наз. *кругомъ*. Часть круга, напр.  $COB$ , ограниченная дугою и двумя радіусами, проведенными къ концамъ дуги, наз. *секторомъ*; часть круга, напр.  $EmF$ , ограниченная дугою и стягивающею ее хордою, наз. *сегментомъ*.

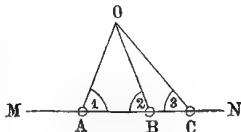
**105. Слѣдствія:** 1°, всѣ радіусы одной окружности равны;

2°, діаметръ равенъ двумъ радіусамъ;

3°, точка, лежащая внутри круга, ближе къ центру, а точка внѣ круга дальше отъ центра, чѣмъ точки окружности.

**106. Теорема.** *Прямая и окружность не могут иметь больше двух общих точек.*

Для доказательства предположим, что прямая  $MN$  имѣетъ съ окружностью, которой центръ находится въ точкѣ  $O$ , три общія точки:  $A, B$  и  $C$ . Тогда прямыя  $OA, OB, OC$  должны быть равны между собою, какъ радіусы. вслѣдствіе чего тр.-ки  $OAB$  и  $OAC$  будутъ равнобедренные и, слѣдов.,  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 1 = \angle 3$ ; откуда:  $\angle 2 = \angle 3$ ; но это невозможно, такъ какъ  $\angle 2$ , будучи вѣншимъ по отношенію къ тр.-пику  $OBC$ , больше внутренняго не смежнаго съ нимъ угла  $3$  (42).



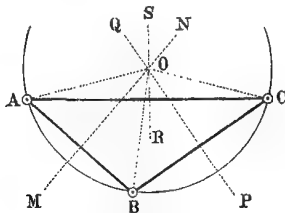
Черт. 83

**107. Слѣдствіе.** *Никакая часть окружности не можетъ совмѣститься съ прямой, потому что въ противномъ случаѣ окружность съ прямою имѣла бы болѣе двухъ общихъ точекъ.*

**108. Опредѣленіе.** *Линія, которой никакая часть не можетъ совмѣститься съ прямой, наз. кривою.*

Изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что *окружность есть кривая линія.*

**109. Теорема.** *Черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность и притомъ только одну.*



Черт. 84

Если возможно провести окружность черезъ три точки

$A, B$  и  $C$ , не лежащая на одной прямой, то должна существовать такая точка, которая одинаково удалена от  $A, B$  и  $C$ . Чтобы найти ее, рассуждаемъ такъ: геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ  $A$  и  $B$ , есть прямая  $MN$ , перпендикулярная къ срединѣ отрезка  $AB$  (63); геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ  $B$  и  $C$ , есть прямая  $PQ$ , перпендикулярная къ срединѣ отрезка  $BC$ . Прямая  $MN$  и  $PQ$ , будучи перпендикулярны къ пересекающимся прямымъ  $AB$  и  $BC$ , должны пересѣчься (79, 2°) въ некоторой точкѣ  $O$ . Эта точка, находясь на обоихъ геометрическихъ мѣстахъ, одинаково удалена отъ  $A, B$  и  $C$ ; поэтому окружность, описанная изъ точки  $O$ , какъ центра, радиусомъ  $OA$ , пройдетъ черезъ эти точки. Итакъ, черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность.

Такъ какъ точка, одинаково удаленная отъ  $A, B$  и  $C$ , должна непремѣнно находиться въ пересѣченіи прямыхъ  $MN$  и  $PQ$ , а двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то искомая окружность имѣетъ *только одинъ* центръ  $O$ ; такъ какъ, сверхъ того, длина ея радиуса можетъ быть *только одна*, равная разстоянію точки  $O$  отъ  $A$ , или отъ  $B$ , или отъ  $C$ , то искомая окружность есть *единственная*.

**110. Слѣдствіе.** Точка  $O$  (черт. 84), находясь на одинаковомъ разстояніи отъ  $A$  и  $C$ , должна лежать на перпендикулярѣ  $RS$  къ срединѣ хорды  $AC$  (59). Такимъ образомъ:

*Три перпендикуляра къ серединамъ сторонъ треугольника ( $ABC$ , черт. 84) пересѣкаются въ одной точкѣ.*

**111. Задача.** *Найти центръ данной окружности.*

Взявъ на данной окружности какія-нибудь три точки  $A, B$  и  $C$  (черт. 84), проводятъ черезъ нихъ двѣ хорды, напр.  $AB$  и  $BC$ , и изъ срединъ этихъ хордъ восстанавливаютъ перпендикуляры  $MN$  и  $PQ$ . Искомый центръ, будучи одинаково удаленъ отъ  $A, B$  и  $C$ , долженъ лежать и на  $MN$ , и на  $PQ$ ; слѣд., онъ будетъ въ пересѣченіи этихъ перпендикуляровъ.

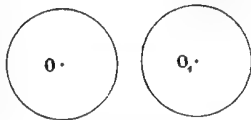


## ГЛАВА II.

### Равенство и неравенство дугъ.

**112. Теорема.** *Два круга одинаковаго радиуса равны.*

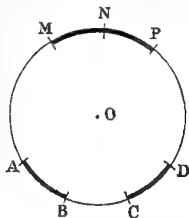
Пусть  $O$  и  $O_1$  будутъ центры двухъ круговъ, которыхъ радиусы равны. Наложимъ кругъ  $O$  на кругъ  $O_1$  такъ, чтобы ихъ центры совпали. Тогда обѣ окружности совмѣстятся, такъ какъ въ противномъ случаѣ ихъ точки неодинаково отстояли бы отъ центра и, слѣд., радиусы были бы неравны.



Черт. 85

**113. Слѣдствіе.** Вращая одинъ изъ совпавшихъ круговъ вокругъ общаго центра, мы не нарушимъ совмѣщенія. Изъ этого слѣдуетъ, что *части одной окружности или равныхъ окружностей совмѣстимы.*

**114. Опредѣленія.** Двѣ дуги одного радиуса считаются *равными*, если онѣ при положеніи совмѣщаются. Положимъ, напр., что мы накладываемъ дугу  $AB$  на дугу  $CD$  такъ, чтобы точка  $A$  ушла въ точку  $C$  и дуга  $AB$  пошла по дугѣ  $CD$  (что возможно, какъ мы видѣли въ предыдущемъ слѣдствіи); если при этомъ концы  $B$  и  $D$  совпадутъ, то  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ; въ противномъ случаѣ дуги неравны, причемъ та будетъ меньше, которая составитъ только часть другой.



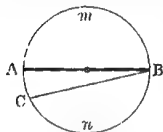
Черт. 86

Суммою нѣсколькихъ данныхъ дугъ одинаковаго радиуса наз. такая дуга того же радиуса, которая составлена изъ частей, соответственно равныхъ даннымъ дугамъ. Такъ, если отъ произвольной точки  $M$  (черт. 86) окружности отложимъ часть  $MN$ , равную  $AB$ , и затѣмъ отъ точки  $N$  въ томъ же направле-

ни часть  $NP$ , равную  $CD$ , то дуга  $MP$  будетъ сумма дугъ  $AB$  и  $CD$ . Подобно этому можно составить сумму трехъ и болѣе дугъ.

Изъ понятія о суммѣ дугъ одного и того же радіуса выводятся понятія объ ихъ разности, произведеніи и частномъ въ томъ же смыслѣ, какъ и для отръзковъ прямыхъ.

**115. Теорема.** *Всякій діаметръ дѣлитъ окружность и кругъ пополамъ.*



Черт. 87

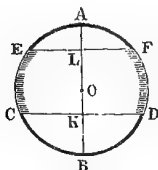
Вообразимъ, что кругъ перегнуть по какому-нибудь діаметру  $AB$  такъ, чтобы часть  $AmB$  упала на часть  $AnB$ . Тогда всѣ точки дуги  $m$  совмѣстятся съ точками дуги  $n$ , потому что въ противномъ случаѣ точки одной дуги лежали бы ближе къ центру, чѣмъ точки другой дуги, что невозможно.

Такимъ образомъ, всякій діаметръ раздѣляетъ окружность на двѣ *полукружности* и кругъ на два *полукруга*.

**116. Замѣчаніе.** Всякая хорда  $OB$  (черт. 87), не проходящая черезъ центръ, стягиваетъ двѣ *неравныя* дуги: одну, болѣеую полукружности, другую—меньшую ея. Когда говорить: „дуга, стягиваемая хордой“, то обыкновенно разумѣютъ дугу, меньшую полукружности.

**117. Теоремы.** 1°. *Діаметръ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ эту хорду и обѣ стягиваемыя ею дуги пополамъ.*

2°. *Дуги, заключенныя между параллельными хордами, равны.*



Черт 88

1°. Пусть діаметръ  $AB$  перпендикуляренъ къ хордѣ  $CD$ ; требуется доказать, что

$$CK = KD \text{ и } \frown CB = \frown BD, \frown CA = \frown DA.$$

Перегнемъ чертежъ по діаметру  $AB$  такъ, чтобы его лѣвая часть упала на правую. Тогда полукружность  $AECB$

совмѣстится съ полуокружностью  $AFDB$ , а перпендикуляръ  $KC$  пойдетъ по  $KD$ . Изъ этого слѣдуетъ, что точка  $C$  совпадаетъ съ  $D$ ; поэтому:

$$KC = KD; \sphericalangle BC = \sphericalangle BD; \sphericalangle AC = \sphericalangle AD.$$

2°. Пусть (черт. 88) хорды  $EF$  и  $CD$  параллельны; требуется доказать, что  $\sphericalangle CE = \sphericalangle DF$ .—Проведемъ диаметръ  $AB$ , перпендикулярный къ хордамъ (74), перевернемъ чертежъ по этому диаметру. Тогда одна полуокружность совпадетъ съ другою, перпендикуляръ  $KC$  пойдетъ по  $KD$ , а перпендикуляръ  $LE$  по  $LF$ . Изъ этого слѣдуетъ, что точка  $C$  совмѣстится съ  $D$ , а точка  $E$  съ  $F$ ; значить,  $\sphericalangle CE = \sphericalangle DF$ .

**118. Задача.** Раздѣлить данную дугу ( $CD$ , черт. 88) пополамъ.

Проведемъ хорду  $CD$ , опускаемъ на нее перпендикуляръ изъ центра и продолжаемъ его до пересѣченія съ дугою. По доказанному въ предыдущей теоремѣ дуга  $CD$  раздѣлится этимъ перпендикуляромъ пополамъ.

### ГЛАВА III.

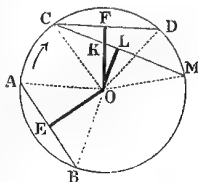
## Зависимость между дугами, хордами и разстояніемъ хорды отъ центра.

**119. Теоремы.** Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, если дуги равны, то стягивающія ихъ хорды равны и одинаково удалены отъ центра;

2°, если дуги не равны и притомъ меньшіе полуокружности, то большая изъ нихъ стягивается большою хордою, и эта большая хорда ближе къ центру.

1°. Пусть дуга  $AB$  равна дугѣ  $CD$ ; требуется доказать, что хорды  $AB$  и  $CD$  равны, а также равны перпендикуляры  $OE$  и  $OF$ , опущенные изъ



Черт. 89

центра на хорды. — Повернемъ секторъ  $OAB$  вокругъ центра  $O$  въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, на столько, чтобы радіусъ  $OB$  совпалъ съ  $OC$ . Тогда дуга  $BA$  пойдетъ по дугѣ  $CD$ , и вслѣдствіе ихъ равенства эти дуги совмѣстятся. Значить, хорда  $AB$  совмѣстится съ хордою  $CD$  (между двумя точками можно провести только одну прямую) и перпендикуляръ  $OE$  совпадетъ съ  $OF$  (изъ одной точки можно опустить на прямую только одинъ перпендикуляръ); т.-е.  $AB=CD$  и  $OE=OF$ .

2°. Пусть дуга  $AB$  (черт. 89) меньше дуги  $CM$ , и притомъ обѣ дуги меньше полуокружности; требуется доказать, что хорда  $AB$  меньше хорды  $CM$ , а перпендикуляръ  $OE$  больше перпендикуляра  $OL$ . — Отложимъ на дугѣ  $CM$  часть  $CD$ , равную  $AB$ , и проведемъ вспомогательную хорду  $CD$ , которая, по доказанному, равна хордѣ  $AB$ . У тр.-ковъ  $COM$  и  $COD$  двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого (какъ радіусы), а углы, заключенные между этими сторонами, не равны; въ этомъ случаѣ, какъ мы знаемъ (54), противъ большаго изъ угловъ, т.-е.  $COM$ , должна лежать большая сторона; значить,  $CM > CD$ , и потому  $CM > AB$ .

Для доказательства того, что  $OE > OL$ , примемъ во вниманіе, что, по доказанному въ 1-ой части этой теоремы,  $OE=OF$ ; слѣд., намъ достаточно сравнить  $OF$  съ  $OL$ . Въ прямоугольномъ тр.-кѣ  $OKL$  гипотенуза  $OK$  больше катета  $OL$ ; но  $OF > OK$ ; значить, и подавно,  $OF > OL$  и потому  $OE > OL$ .

Теорема, доказанная нами для одного круга, остается вѣрною и для равныхъ круговъ, потому что такіе круги ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются, кромѣ своего положенія.

**120. Обратныя предложенія.** Такъ какъ въ предыдущемъ параграфѣ разсмотрѣны всевозможные случаи относительно величины двухъ дугъ одного радіуса, причемъ получились различные выводы относительно величины хордъ и разстоянія ихъ отъ центра, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (48), а именно:

*Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1°, равныя хорды стягиваютъ равныя дуги и одинаково удалены отъ центра;

2°, хорды, одинаково удаленныя отъ центра, равны и стягиваютъ равныя дуги;

3°, изъ двухъ неравныхъ хордъ бôльшая стягиваетъ бôльшую дугу и ближе къ центру;

4°, изъ двухъ хордъ, неодинаково удаленныхъ отъ центра, та, которая ближе къ центру, больше и стягиваетъ бôльшую дугу.

Эти предложенія легко доказываются отъ противнаго. Напр., для доказательства перваго изъ нихъ рассуждаемъ такъ: если бы данныя хорды стягивали неравныя дуги, то, согласно прямой теоремѣ, онѣ были бы неравны, что противорѣчитъ условію; значить, равныя хорды должны стягивать равныя дуги; а если дуги равны, то, согласно прямой теоремѣ, стягивающія ихъ хорды одинаково удалены отъ центра.

**121. Теорема.** *Діаметръ есть наибольшая изъ хордъ.*

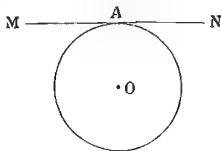
Если соединимъ съ центромъ концы какой-нибудь хорды, не проходящей черезъ центръ, то получимъ тр.-къ, въ которомъ одна сторона есть эта хорда, а двѣ другія—радіусы. Но въ тр.-кѣ одна сторона менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ; слѣдов., взятая нами хорда менѣе двухъ радіусовъ; тогда какъ всякій діаметръ равенъ двумъ радіусамъ. Значить, діаметръ больше всякой хорды, не проходящей черезъ центръ.

## ГЛАВА IV.

### Свойства касательной.

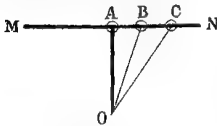
**122. Опредѣленіе.** Прямая  $MN$ , имѣющая съ окружностью только одну общую точку  $A$ , наз. касательною къ окружности.

Возможность существованія касательной, и при томъ во всякой точкѣ окружности, доказывается слѣдующей теоремой.



Черт. 90

**123. Теорема.** Если прямая перпендикулярна къ радиусу въ концѣ его, лежащемъ на окружности, то она есть касательная.

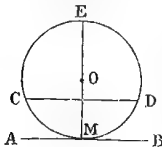


Черт. 91

Пусть  $O$  есть центръ круга и  $OA$  какой-нибудь радиусъ. Черезъ конецъ его  $A$  проведемъ  $MN \perp OA$ ; требуется доказать, что прямая  $MN$  есть касательная, т.-е. что эта прямая имѣетъ съ окружностью только одну общую точку  $A$ . — Допустимъ противное: пусть  $MN$  имѣетъ съ окружностью еще другую общую точку, напр.  $B$ . Тогда прямая  $OB$  была бы радиусомъ и, слѣд., равнялась бы  $OA$ ; но этого быть не можетъ, такъ какъ, если  $OA$  есть перпендикуляръ, то  $OB$  должна быть наклонная къ  $MN$ , а наклонная больше перпендикуляра.

**124. Обратная теорема.** Если прямая касательна къ окружности, то радиусъ, проведенный въ точку касанія, перпендикуляренъ къ ней.

Пусть  $MN$  (черт. 91) есть касательная къ окружности,  $A$  точка касанія и  $O$  центръ окружности; требуется доказать, что  $OA \perp MN$ . — Допустимъ противное, т.-е. предположимъ, что перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ  $O$  на  $MN$ , будетъ не  $OA$ , а какая-нибудь другая прямая, напр.  $OB$ . Возьмемъ  $BC = BA$  и проведемъ  $OC$ . Тогда  $OA$  и  $OC$  будутъ наклонныя, одинаково удаленныя отъ перпендикуляра  $OB$ , и слѣд.  $OC = OA$ . Изъ этого слѣдуетъ, что окружность, при нашемъ предположеніи, будетъ имѣть съ прямою  $MN$  двѣ общія точки:  $A$  и  $C$ , т.-е.  $MN$  будетъ не касательная, а сѣкущая, что противорѣчитъ условию.



Черт. 92

**125. Теорема.** Касательная, параллельная хордѣ, дѣлитъ въ точкѣ касанія дугу, стягиваемую хордой, пополамъ.

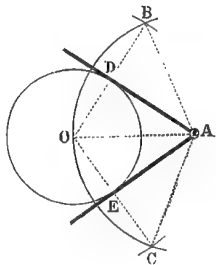
Пусть прямая  $AB$  касается окружности въ точкѣ  $M$  и параллельна хордѣ  $CD$ ; требуется доказать, что  $\widehat{CM} = \widehat{MD}$ .

Проведа черезъ точку касанія діаметръ  $ME$ , будемъ имѣть:  $EM \perp AB$  (124) и слѣд.  $EM \perp CD$  (74); поэтому  $CM = MD$  (117).

**126. Задача.** *Черезъ данную точку провести касательную къ данной окружности.*

Проведеніе касательной черезъ точку, данную на окружности, выполняется на основаніи теоремы § 123: проводятъ черезъ эту точку радіусъ и черезъ конецъ его перпендикулярную прямую. Разсмотримъ тотъ случай, когда точка дана вне окружности.

Пусть требуется провести къ окружности  $O$  касательную черезъ точку  $A$ . Для этого изъ точки  $A$ , какъ центра, описываемъ дугу радіусомъ  $AO$ , а изъ точки  $O$ , какъ центра, пересѣкаемъ эту дугу въ точкахъ  $B$  и  $C$  раствореніемъ циркуля, равнымъ діаметру даннаго круга. Проведа затѣмъ хорды  $OB$  и  $OC$ , соединимъ точку  $A$  съ точками  $D$  и  $E$ , въ которыхъ эти хорды пересѣкаются съ данною окружностью. Прямая  $AD$  и  $AE$  будутъ касательными къ



Черт. 93

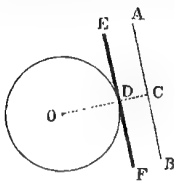
окружности  $O$ . Дѣйствительно, изъ построенія видно, что тр.-ки  $AOB$  и  $AOC$  равнобедренныя ( $AO = AB = AC$ ) съ основаніями  $OB$  и  $OC$ , равными діаметру круга  $O$ . Такъ какъ  $OD$  и  $OE$  суть радіусы, то  $D$  есть середина  $OB$  и  $E$  середина  $OC$ ; значитъ,  $AD$  и  $AE$  суть медианы, проведенныя къ основаніямъ равнобедренныхъ тр.-ковъ, и потому перпендикулярны къ этимъ основаніямъ (37). Если же прямая  $DA$  и  $EA$  перпендикулярны къ радіусамъ  $OD$  и  $OE$ , то онѣ касательныя (123).

Другой способъ проведенія касательной будетъ указанъ ниже (158).

**127. Слѣдствіе.** *Двѣ касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности, равны.*

Такъ,  $AD = AE$  (черт. 93), потому что прямоугольные тр.-ки  $AOD$  и  $AOE$ , имѣющіе общую гипотенузу  $AO$  и равные катеты  $OD$  и  $OE$  (какъ радіусы), равны.

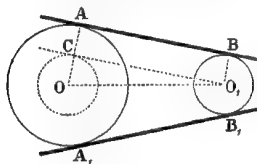
**128. Задача.** Провести касательную къ данной окружности  $O$  параллельно данной прямой  $AB$ .



Черт. 94

Опускаемъ на  $AB$  изъ центра  $O$  перпендикуляръ  $OC$  и черезъ точку  $D$ , въ которой этотъ перпендикуляръ пересѣкается съ окружностью, проводимъ  $EF \parallel AB$ . Искомая касательная будетъ  $EF$ . Дѣйствительно, такъ какъ  $OC \perp AB$  и  $EF \parallel AB$ , то  $EF \perp OD$ ; а прямая, перпендикулярная къ радіусу въ концѣ его, лежащемъ на окружности, есть касательная.

**129. Задача.** Къ двумъ окружностямъ  $O$  и  $O_1$  провести общую касательную.



Черт. 95

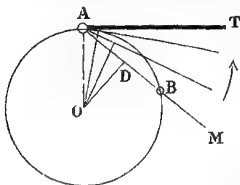
1°. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть  $AB$  будетъ общая касательная,  $A$  и  $B$  точки касанія. Очевидно, что если мы найдемъ одну изъ этихъ точекъ, напр.  $A$ , то затѣмъ легко найдемъ и другую. Проведемъ радіусы  $OA$  и  $O_1B$ . Эти радіусы, будучи перпендикулярны къ общей касательной, па-

раллельны между собою; поэтому если изъ  $O_1$  проведемъ  $O_1C \parallel BA$ , то тр.-къ  $OCO_1$  будетъ прямоугольнымъ при вершинѣ  $C$ ; вслѣдствіе этого, если опишемъ изъ  $O$ , какъ центра, радіусомъ  $OC$  окружность, то она будетъ касаться прямой  $O_1C$  въ точкѣ  $C$ . Радіусъ этой вспомогательной окружности извѣстенъ: онъ равенъ  $OA - CA = OA - O_1B$ , т.-е. онъ равенъ разности радіусовъ данныхъ окружностей. Такимъ образомъ построение можно выполнить такъ: изъ  $O$  описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ разности данныхъ радіусовъ; изъ  $O_1$





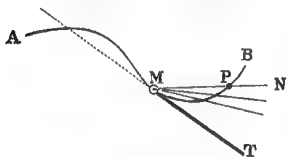
Станемъ вращать эту сѣющую вокругъ точки  $A$  такъ, чтобы другая точка пересѣченія  $B$  все ближе и ближе придвигалась къ  $A$ . Тогда перпендикуляръ  $OD$ , опущенный изъ центра на сѣющую, будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ радиусу  $OA$ , и уголъ  $AOD$  можетъ сдѣлаться меньше всякаго малаго угла. Уголъ  $MAT$ , образованный сѣющею и касательною, равенъ углу  $AOD$  (вслѣдствіе перпендикулярности ихъ сторонъ); поэтому при неограниченномъ приближеніи точки  $B$  къ  $A$  уголъ  $MAT$  также можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малъ. Это выражаютъ нѣмцы



Черт. 97

словами такъ: *касательная есть предѣльное положеніе, къ которому стремится сѣющая, проведенная черезъ точку касанія, когда вторая точка пересѣченія неограниченно приближается къ точкѣ касанія.*

Это свойство принимаютъ за опредѣленіе касательной, когда рѣчь идетъ о какой угодно кривой. Такъ, касательною къ кривой  $AB$  въ точкѣ  $M$  наз. предѣльное положеніе  $MT$ , къ которому стремится сѣющая  $MN$ , когда точка пересѣченія  $P$  неограниченно приближается къ  $M$ .



Черт. 98

Замѣтимъ, что опредѣляемая такимъ образомъ касательная можетъ имѣть съ кривою болѣе од-

ной общей точки (какъ это видно на черт. 98).

**131. Выпуклая кривая.** Кривая, или часть кривой, наз. *выпуклою*, если она расположена по одну сторону отъ каждой своей касательной.

Выпуклая кривая обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, какъ и выпуклая логамая: она не можетъ пересѣчься съ прямою болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

*Окружность есть выпуклая кривая.*

## ГЛАВА V.

### Относительное положеніе окружностей.

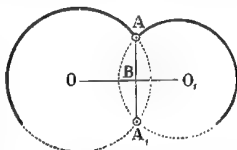
**132. Опредѣленія.** Если двѣ окружности имѣютъ только одну общую точку, то говорятъ, что онѣ *касаются*; если же двѣ окружности имѣютъ двѣ общія точки, то говорятъ, что онѣ *пересѣкаются*.

Трехъ общихъ точекъ двѣ не сливающіяся окружности имѣть не могутъ, потому что въ противномъ случаѣ черезъ три точки можно было бы провести двѣ различныя окружности, что невозможно (109).

**133. Теорема.** Если двѣ окружности имѣютъ общую точку по одну сторону отъ линіи ихъ центровъ, то онѣ имѣютъ общую точку и по другую сторону отъ линіи центровъ, т.-е. такіа окружности пересѣкаются.

Пусть окружности  $O$  и  $O_1$  имѣютъ общую точку  $A$ , лежащую внѣ линіи центровъ  $OO_1$ ; требуется доказать, что эти окружности имѣютъ еще общую точку по другую сторону отъ прямой  $OO_1$ .

Опустимъ пзъ  $A$  на прямую  $OO_1$  перпендикуляръ  $AB$  и продолжимъ его на разстояніе  $BA_1$ , равное  $AB$ . Докажемъ теперь, что точка  $A_1$  принадлежитъ обѣимъ окружностямъ. Изъ построенія видно, что точки  $O$  и  $O_1$  лежатъ на перпендикулярѣ къ срединѣ отрѣзка  $AA_1$ . Изъ этого слѣдуетъ, что точка  $O$  одинаково удалена отъ  $A$  и  $A_1$  (59, 2°); то же можно сказать и о точкѣ  $O_1$ ; значитъ, обѣ окружности, при продолженіи ихъ, пройдутъ черезъ  $A_1$ . Такимъ образомъ, окружности будутъ имѣть двѣ общія точки:  $A$  (по условію) и  $A_1$  (по доказанному); слѣд., онѣ пересѣкаются.



Черт. 90

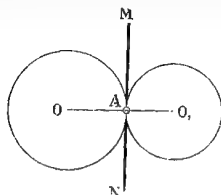
**134. Слѣдствіе.** Общая хорда ( $AA_1$ , черт. 99) двухъ пересѣкающихся окружностей перпендикулярна къ линіи центровъ и дѣлится ею пополамъ.

**135. Теоремы.** 1°. Если двѣ окружности имѣютъ общую точку на линіи центровъ или на ея продолженіи, то онѣ касаются.

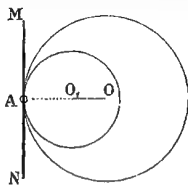
2°. Обратное: если двѣ окружности касаются, то общая ихъ точка лежитъ на линіи центровъ или на ея продолженіи.

1°. Пусть общая точка  $A$  двухъ окружностей лежитъ на линіи центровъ  $OO_1$  (черт. 100) или на продолженіи ея

(черт. 101). Требуется доказать, что такіа окружности касаются, т.-е. что онѣ не имѣютъ никакой другой общей точки. — Окружности не могутъ имѣть другой общей точки *внѣ*



Черт. 100



Черт. 101

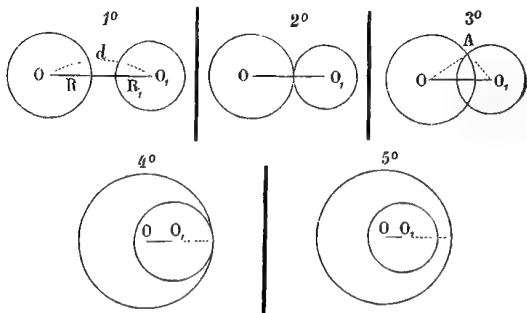
линіи центровъ, потому что въ противномъ случаѣ онѣ имѣли бы еще третью общую точку по другую сторону линіи центровъ (133) и, слѣд., должны были бы слиться (109). Онѣ не могутъ имѣть другой общей точки и на линіи центровъ, такъ какъ на этой прямой, очевидно, пѣтъ другой точки, которая отъ обоихъ центровъ была бы удалена на столько же, какъ и точка  $A$ . Слѣд., окружности имѣютъ только одну общую точку, т.-е. онѣ касаются.

2°. Пусть двѣ окружности  $O$  и  $O_1$  (черт. 100 или 101) касаются, т.-е. онѣ имѣютъ только одну общую точку  $A$ ; требуется доказать, что эта точка лежитъ на линіи центровъ или на ея продолженіи. — Точка  $A$  не можетъ лежать внѣ линіи центровъ, потому что въ противномъ случаѣ окружности пересѣклись бы (133).

**136. Слѣдствіе.** Двѣ касательныя окружности имѣютъ общую касательную въ точкѣ касанія, потому что прямая  $MN$  (черт. 100 или 101), перпендикулярная къ  $OA$ , перпендикулярна также и къ  $O_1A$ .

**137. Признаки различныхъ случаевъ относительнаго положенія окружностей.** Пусть имѣемъ двѣ окружности, которыхъ центры суть  $O$  и  $O_1$ , радіусы  $R$  и  $R_1$  и разстояніе между центрами  $d$ . Эти окружности могутъ находиться въ слѣдующихъ 5-ти относительныхъ положеніяхъ:

1°. Окружности лежат одна вѣтъ другой, не касаясь; въ этомъ случаѣ, очевидно,  $d > R + R_1$ .



Черт. 102

2°. Окружности имѣютъ внѣшнее касаніе; тогда  $d = R + R_1$ , такъ какъ точка касанія лежитъ на линіи центровъ  $OO_1$ .

3°. Окружности пересѣкаются; тогда  $d < R + R_1$  и  $d > R - R_1$ , потому что въ тр.-къ  $OA O_1$  сторона  $OO_1$  меньше суммы, но больше разности двухъ другихъ сторонъ.

4°. Окружности имѣютъ внутреннее касаніе; въ этомъ случаѣ  $d = R - R_1$ , потому что точка касанія лежитъ на продолженіи линіи  $OO_1$ .

5°. Одна окружность лежитъ внутри другой; тогда, очевидно,  $d < R - R_1$  (въ частномъ случаѣ  $d$  можетъ равняться нулю, т.-е. окружности могутъ имѣть общій центръ; такіе окружности наз. концентрическими).

**138. Обратныя предложенія.** Такъ какъ различные случаи расположенія двухъ окружностей сопровождаются различными соотношеніями между разстояніемъ центровъ и величиною радіусовъ, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (48), а именно:

1°. Если  $d > R + R_1$ , то окружности расположены одна внѣ другой, не касаясь.

2°. Если  $d = R + R_1$ , то окружности касаются извнѣ.

3°. Если  $d < R + R_1$  и  $d > R - R_1$ , то окружности пересѣкаются.

4°. Если  $d = R - R_1$ , то окружности касаются изнутри.

5°. Если  $d < R - R_1$ , то одна окружность лежитъ внутри другой, не касаясь.

Эти предложенія легко доказываются отъ противнаго. Напр., для доказательства перваго предложенія рассуждаемъ такъ: предположимъ противное, т.-е. что окружности не расположены одна внѣ другой. Тогда могутъ представиться 4 случая относительно ихъ расположенія. Какой бы изъ этихъ случаевъ мы ни взяли, ни въ одномъ изъ нихъ не будетъ такой зависимости между разстояніемъ центровъ и величиною радіусовъ, какая намъ дана условіемъ ( $d > R + R_1$ ); значитъ, всѣ эти случаи исключаются. Остается одинъ возможный, именно тотъ, который требовалось доказать.

Такимъ образомъ, перечисленные признаки различныхъ случаевъ относительнаго положенія двухъ окружностей не только необходимы, но и достаточны.

## УПРАЖНЕНІЯ.

### Найти геометрическія мѣста:

101. — точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности, равны данной длинѣ.

102. — точекъ, изъ которыхъ данная окружность видна подъ даннымъ угломъ (т.-е. двѣ касательныя, проведенныя изъ каждой точки къ окружности, составляютъ между собою данный уголъ).

103. — центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусомъ и касающихся данной прямой.

104. — центровъ окружностей, касающихся данной окружности въ данной точкѣ.

105. — центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусомъ и касающихся данной окружности (два случая: касаніе вѣншнее и касаніе внутреннее).

106. Прямая данной длины движется параллельно самой собою такъ, что одинъ ея конецъ скользитъ по окружности. Найти геом. мѣсто, описываемое другимъ концомъ.

107. Прямая данной длины движется такъ, что концы ея скользятъ по сторонамъ прямого угла. Найти геом. мѣсто, описываемое серединою этой прямой.

### Доказать теоремы:

108. Если черезъ центръ окружности и данную точку въ ея проводимъ секущую, то часть ея, заключенная между данною точкою и ближайшею точкою пересѣченія, есть кратчайшее, а часть, заключенная между данною точкою и другою точкою пересѣченія, есть наибольшее разстояние точки отъ окружности.

109. Кратчайшее разстояние между двумя окружностями, лежащими одна внѣ другой, есть отрезокъ линіи центровъ, заключенный между окружностями.

110. Изъ всѣхъ хордъ, проведенныхъ въ окружности черезъ одну точку, наименьшая есть та, которая перпендикулярна къ радіусу, проходящему черезъ эту точку.

111. Если черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей будемъ проводить секущія, не продолжая ихъ за окружности, то наибольшая изъ нихъ будетъ та, которая параллельна линіи центровъ.

112. Если къ двумъ окружностямъ, касающимся извнѣ, провести три общія касательныя, то внутренняя изъ нихъ дѣлится двѣ другія въ точкахъ, одинаково удаленныхъ отъ точекъ касанія.

113. Всѣ хорды данной длины, проведенныя въ данной окружности, касаются нѣкоторой другой окружности.

114. Если черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей проведемъ диаметры въ каждой окружности, то прямая, соединяющая концы ихъ, пройдетъ черезъ другую точку пересѣченія.

### Задачи на построение:

115. Раздѣлить дугу на 4, 8, 16... равныхъ частей.

116. По суммѣ и разности дугъ найти эти дуги.

117. Изъ данной точки, какъ центра, описать такую окружность, которая раздѣлила бы данную окружность пополамъ.

118. На данной прямой найти точку, наименѣе удаленную отъ данной окружности.

119. Въ кругѣ дана хорда. Провести другую хорду, которая дѣлилась бы первою пополамъ и составляла съ нею данный уголъ.

120. Черезъ данную въ кругѣ точку провести хорду, которая дѣлилась бы этою точкою пополамъ.

121. Изъ точки, данной на сторонѣ угла, описать окружность, касающаяся отъ другой стороны угла отсѣкала бы хорду данной длины.

122. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которой центръ лежалъ бы на сторонѣ даннаго угла и которая отъ другой стороны его отсѣкала бы хорду данной дуги.

123. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы данной прямой въ данной точкѣ.

124. Описать окружность, касательную къ сторонамъ даннаго угла, причемъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

125. Описать окружность, касающуюся трехъ сторонъ тр.-лики.

126. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести окружность, проходящую черезъ эту точку и касающуюся данныхъ прямыхъ.

127. Провести къ данной окружности касательную подъ даннымъ угломъ къ данной прямой.

128. Изъ точки, данной вѣн окружности, провести къ ней сѣкущую такъ, чтобы внутренняя ея часть равнялась данной дугѣ (ислѣдовать задачу).

129. Даннымъ радіусомъ описать окружность, проходящую черезъ данную точку и касательную къ данной прямой.

130. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательнымъ, проведеннымъ изъ нея къ данной окружности, были данной длины.

131. Построить  $\triangle$ , зная одинъ уголъ и двѣ высоты, изъ которыхъ одна проведена изъ вершины даннаго угла.

132. Даны двѣ окружности; провести къ нимъ сѣкущую такъ, чтобы внутреннія части ея равнялись даннымъ отрезкамъ.

133. Даны двѣ точки; провести прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ этихъ точекъ, имѣли данную длину.

134. Описать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку и касалась бы данной окружности въ данной точкѣ.

135. Описать окружность, которая касалась бы двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ и къ кругу, находящемуся между ними.

136. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы даннаго круга и проходила черезъ данную точку.

137. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы данной прямой и даннаго круга.

138. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая отъ сторонъ даннаго угла отсѣкала бы хорды данной дуги.

139. Описать окружность, касающуюся даннаго круга въ данной точкѣ и данной прямой (2 рѣшенія).

140. Описать окружность, касающуюся данной прямой въ данной точкѣ и даннаго круга (2 рѣшенія).

141. Описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ круговъ, причемъ одного изъ нихъ въ данной точкѣ (разсмотрѣть три случая: 1, искомый кругъ лежитъ вѣн данныхъ; 2, одинъ изъ данныхъ круговъ лежитъ вѣн искомага, другой внутри; 3, оба данные круга лежатъ внутри искомага).



142. Описать окружность, касающуюся трех равных кругов извне или изнутри.

143. Въ данный секторъ вписать окружность, касающуюся къ радиусамъ и дугѣ сектора.

144. Вписать въ данный кругъ три равные круга, которые касались бы попарно между собою и даннаго круга.

145. Черезъ точку внутри круга провести хорду такъ, чтобы разность ея отрезковъ равнялась данной длинѣ.

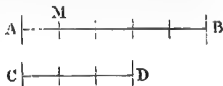
146. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести сѣкущую такъ, чтобы часть ея, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длинѣ.

147. Изъ точки, данной внѣ окружности, провести сѣкущую такъ, чтобы внѣшняя ея часть равнялась внутренней.

## ГЛАВА VI.

### Измѣреніе величинъ.

**139. Общая мѣра.** Общюю мѣрою двухъ конечныхъ прямыхъ называется такой отрезокъ прямой, который въ каждой изъ нихъ содержится цѣлое число разъ. Такъ, если отрезокъ  $AM$  содержится въ  $AB$  и  $CD$  цѣлое число разъ (напр., 5 разъ въ  $AB$  и 3 раза въ  $CD$ ), то  $AM$  есть общая мѣра  $AB$  и  $CD$ .



Черт. 103

Подобно этому можетъ быть общая мѣра двухъ дугъ одинаковаго радіуса, двухъ угловъ и вообще двухъ значений одной и той же величины.

**140. Нахожденіе наибольшей общей мѣры.** Чтобы найти наибольшую общую мѣру двухъ конечныхъ прямыхъ, употребляютъ способъ *последовательнаго дѣленія*, подобный тому, какимъ въ ариметикѣ находятъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ. Этотъ способъ основывается на слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:



Черт. 104

1°. Если большая прямая  $A$  содержитъ меньшую прямую  $B$  цѣлое число разъ, то  $B$  есть наибольшая общая мѣра  $A$  и  $B$ .

Это предположеніе не требуетъ доказательства по своей очевидности (черт. 104).

2°. Если большая прямая  $A$  содержитъ меньшую прямую  $B$  некоторое число разъ съ остаткомъ  $R$ , то наиб. общая мѣра  $A$  и  $B$  есть и наиб. общая мѣра  $B$  и  $R$ .



Черт. 105

Пусть, напр.,  $A$  содержитъ  $B$  три раза съ остаткомъ  $R$ ; тогда можно положить, что

$$A = B + B + B + R$$

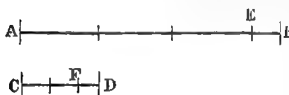
Изъ этого равенства мы можемъ вывести два заключенія:

1°, всякая прямая, содержащаяся цѣлое число разъ въ  $A$  и  $B$ , содержится также цѣлое число разъ и въ  $R$ ; 2°, обратно: всякая прямая, содержащаяся цѣлое число разъ въ  $B$  и  $R$ , содержится также цѣлое число разъ и въ  $A$ ; значить, у двухъ паръ прямыхъ:

$$\overbrace{A \text{ и } B} \quad \overbrace{B \text{ и } R}$$

однѣ и тѣ же общія мѣры; поэтому у нихъ должна быть одна и та же наиб. общая мѣра.

Пусть теперь требуется найти наиб. общую мѣру прямыхъ  $AB$  и  $CD$ . Для этого на большей прямой отклады-



Черт. 106

ваемъ меньшую столько разъ, сколько можно. Если  $CD$  уложится въ  $AB$  безъ остатка, то искомая мѣра, согласно предположенію 1°, и есть  $CD$ ; если же этого не произойдетъ,

то, согласно предположенію 2°, вопросъ приведетъ къ нахожденію наиб. общей мѣры двухъ меньшихъ прямыхъ, именно  $CD$  и остатка  $EB$ . Чтобы найти ее, поступаемъ по предыдущему: откладываемъ  $EB$  на  $CD$  столько разъ, сколько можно. Если  $EB$  уложится въ  $CD$  безъ остатка, то искомая мѣра и будетъ  $EB$ ; если же этого не произойдетъ, то вопросъ приведетъ къ нахожденію наиб. общей мѣры двухъ меньшихъ прямыхъ, именно  $EB$  и новаго остатка  $FD$ . Если, продолжая

этотъ приемъ далѣе, мы дойдемъ до того, что какой-нибудь остатокъ уложится въ предшествующемъ остаткѣ цѣлое число разъ, то этотъ остатокъ и будетъ искомая мѣра.

Чтобы удобнѣе вычислить, сколько разъ найденная общая мѣра содержится въ данныхъ прямыхъ, выпишемъ рядъ равенствъ, получаемыхъ послѣ каждаго отложенія. Положимъ, напр., что

$$AB = 3CD + EB$$

$$CD = 2EB + FD$$

$$EB = 4FD$$

Переходя въ этихъ равенствахъ отъ нижняго къ верхнему, послѣдовательно находимъ:

$$EB = 4FD; CD = 2(4FD) + FD = 9FD;$$

$$AB = 3(9FD) + 4FD = 31FD.$$

Подобно этому можно находить наиб. общую мѣру двухъ дугъ одинаковаго радиуса, двухъ угловъ и т. п.

Замѣтимъ, что, найдя *наибольшую* общую мѣру, мы можемъ затѣмъ получить сколько угодно другихъ *меньшихъ* мѣръ; стоитъ только брать  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  и т. д. наибольшей мѣры.

**141. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя величины.** Можетъ случиться, что при нахожденіи общей мѣры мы никогда не дойдемъ до того, чтобы не получилось никакого остатка; тогда данныя прямыя не будутъ имѣть общей мѣры.

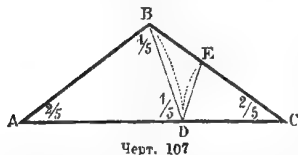
Два значенія одной величины наз. *соизмѣримыми*, если они имѣютъ общую мѣру, и *несоизмѣримыми*, когда такой мѣры не существуетъ.

На практикѣ пѣтъ возможности убѣдиться въ существованіи несоизмѣримыхъ прямыхъ, потому что, продолжая послѣдовательное наложеніе, мы всегда дойдемъ до столь малаго остатка, который въ предшествующемъ остаткѣ, *повидимому*, укладывается цѣлое число разъ. Быть можетъ, при этомъ и долженъ былъ бы получиться нѣкоторый остатокъ, но по причинѣ *неточности* инструментовъ мы не въ состоя-

ни его замѣтить. Однако можно доказать, что несоизмѣримыя прямыя существуютъ. Приведемъ наиболѣе простой примѣръ такихъ прямыхъ.

**142. Теорема.** Если у равнобедреннаго треугольника каждый уголъ при основаніи равенъ  $\frac{2}{3}d$ , то боковая сторона его несоизмѣрима съ основаніемъ.

Пусть  $ABC$  будетъ равнобедренный тр.-къ, у котораго каждый изъ угловъ  $A$  и  $C$  равенъ  $\frac{2}{3}d$ ; требуется доказать, что  $AB$  несоизмѣрима съ  $AC$ .



Для доказательства станемъ находить наиб. общую мѣру между  $AC$  и  $AB$ . Прежде всего опредѣлимъ, которая изъ этихъ прямыхъ больше. Для этого достаточно сравнить углы, противъ которыхъ ле-

жатъ эти стороны. Такъ какъ, по условію,  $A = C = \frac{2}{3}d$ , то  $B = 2d - \frac{2}{3}d - \frac{2}{3}d = \frac{2}{3}d$ ; слѣд.,  $B > C$ ; поэтому  $AC > AB$ . Теперь найдемъ, сколько разъ въ  $AC$  можетъ уложиться  $AB$ . Такъ какъ  $AC < AB + BC$  и  $AB = BC$ , то  $AC < 2AB$ ; значитъ,  $AB$  въ  $AC$  можетъ уложиться только одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ.

Итакъ, если у равнобедреннаго треугольника каждый уголъ при основаніи равенъ  $\frac{2}{3}d$ , то боковая его сторона содержится въ основаніи одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ.

Замѣтивъ это, приступимъ теперь къ послѣдовательному наложенію. Отложимъ на  $AC$  часть  $AD$ , равную  $AB$ ; тогда получимъ остатокъ  $DC$ , который надо накладывать на  $AB$ , или, что все равно, на  $BC$ . Чтобы узнать, сколько разъ  $DC$  уложится въ  $BC$ , соединимъ  $B$  съ  $D$  и рассмотримъ, какой будетъ  $\triangle DBC$ . Для этого найдемъ его углы. Такъ какъ  $\triangle ABD$  равнобедренный, то его углы  $ABD$  и  $ADB$  равны; слѣд., каждый изъ нихъ равенъ  $\frac{1}{2}(2d - A) = \frac{1}{2}(2d - \frac{2}{3}d) = \frac{1}{3}d$ . Но уголъ  $ABC$ , какъ мы выше нашли, равенъ  $\frac{2}{3}d$ ; слѣд.,  $\angle DBC = \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}d$ . Такимъ об-

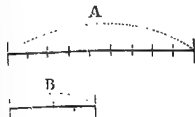
разомъ, у тр.-ка  $DBC$  есть два равныхъ угла при  $BC$ ; слѣд., онъ равнобедренный, при чемъ каждый уголъ при его основаніи  $BC$  равенъ  $\frac{2}{3}d$ . Вслѣдствіе этого, по доказанному выше, боковая сторона его  $DC$  уложится въ основаніи  $BC$  *одинъ разъ съ некоторымъ остаткомъ*. Пусть этотъ остатокъ будетъ  $EB$ . Соединивъ  $E$  съ  $D$ , мы снова получимъ равнобедренный тр.-къ  $BDE$ , у котораго каждый уголъ при основаніи  $BD$  равенъ  $\frac{2}{3}d$ . Къ этому тр.-ку можно примѣнить тѣ же разсужденія; значить, его бокъ  $EB$  содержится въ основаніи  $BD$  (или, все равно, въ  $DC$ ) *одинъ разъ съ некоторымъ остаткомъ*. Продолжая эти разсужденія далѣе, мы постоянно будемъ приходить къ равноб. тр.-ку, у котораго углы при основаніи равны  $\frac{2}{3}d$ , и, слѣд., *постоянно будемъ получать остатки*. Изъ этого слѣдуетъ, что  $AB$  несоизмѣрима съ  $AC$ .

Подобно этому можно доказать, что *диагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною*.

**143. Понятіе объ измѣреніи.** Чтобы составить себѣ ясное представленіе о данной длинѣ, ее измѣряютъ при помощи другой, извѣстной намъ, длины, напр., посредствомъ *метра*. Эта извѣстная длина, съ которой сравниваютъ другія длины, наз. *единицей* длины. При измѣреніи могутъ представиться два различныхъ случая: или измѣряемая длина соизмѣрима съ единицей, или несоизмѣрима съ ней.

1°. *Измѣрить длину, соизмѣримую съ единицей, значитъ узнать, сколько разъ въ ней содержится единица или доля единицы.*

Пусть, напр., надо измѣрить какую-нибудь длину  $A$  при помощи единицы  $B$ , соизмѣримой съ  $A$ . Тогда находятъ ихъ общую мѣру и узнаютъ, сколько разъ она содержится въ  $B$  и  $A$ . Если общей мѣрой окажется сама единица  $B$ , то результатъ измѣренія выразится *цѣлымъ числомъ*; такъ, когда  $B$  содержится въ  $A$  три раза, то говорятъ, что длина  $A$  равна 3 ед. Если же общей мѣрой будетъ доля  $B$ , то результатъ

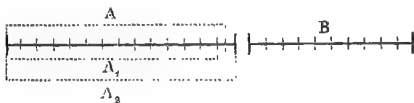


Черт. 108

измѣренія выразится *дробнымъ* числомъ; такъ, если общая мѣра есть  $\frac{1}{4}$  доля  $B$  и она содержится въ  $A$  девять разъ (какъ изображено на черт. 108), то говорятъ, что длина  $A$  равна  $\frac{9}{4}$  единицы.

Число, получившееся послѣ измѣренія, наз. часто *мѣрою* того значенія величины, которое измѣрялось. Числа цѣлыя и дробныя наз. *соизмѣримыми числами*.

2°. Когда данная длина  $A$  несоизмѣрима съ единицей  $B$ , тогда измѣреніе выполняется косвенно: вмѣсто длины  $A$  измѣряютъ двѣ другія длины, *соизмѣримыя съ единицей*, изъ которыхъ одна меньше, а другая больше  $A$ , и которыя разнятся отъ  $A$  такъ мало, какъ угодно. Чтобы найти такія соизмѣримыя длины, поступаютъ такъ: положимъ, что мы желаемъ найти соизмѣримыя длины, которыя отличались бы отъ  $A$  меньше, чѣмъ на  $\frac{1}{10}$  единицы. Тогда дѣлимъ единицу  $B$  на 10 равныхъ частей (черт. 109) и одну такую долю укладываемъ въ длину  $A$  столько разъ, сколько можно. Пусть она уложится 13 разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ, меньшимъ



Черт. 109

$\frac{1}{10} B$ . Тогда мы будемъ имѣть длину  $A_1$ , соизмѣримую съ единицей и меньшую, чѣмъ  $A$ . Отложивъ  $\frac{1}{10} B$  еще одинъ разъ, получимъ другую длину  $A_2$ , тоже соизмѣримую съ единицей, но бѣльшую, чѣмъ  $A_1$ , и которая разнится отъ  $A$  менѣе, чѣмъ на  $\frac{1}{10}$  единицы. Длины  $A_1$  и  $A_2$  выражаются числами  $\frac{13}{10}$  и  $\frac{14}{10}$ . Эти числа рассматриваются, какъ *приближенныя мѣры* длины  $A$ , первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ; причемъ, такъ какъ длина  $A$  разнится отъ  $A_1$  и  $A_2$  менѣе, чѣмъ на  $\frac{1}{10}$  единицы, то каждое изъ этихъ чиселъ выразитъ длину  $A$  съ *точностью до*  $\frac{1}{10}$ .

Вообще, чтобы найти приближенныя мѣры длины  $A$  съ точностью до  $\frac{1}{n}$  единицы, дѣлать единицу  $B$  на  $n$  равныхъ частей и узнаютъ, сколько разъ  $\frac{1}{n}$  доля содержится въ  $A$ ;

если она содержится болѣе  $m$  разъ, то менѣе  $m+1$  разъ, то числа  $m/n$  и  $m+1/n$  будутъ приближенные мѣры  $A$  съ точностью до  $1/n$ , первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ.

Предположимъ теперь, что число  $n$  равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ единицу  $B$ , неограниченно увеличивается (напр.,  $n=10, 100, 1000$  и т. д.); тогда разность между длиною  $A$  и каждою изъ соизмѣримыхъ длинъ  $A_1$  и  $A_2$  будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться и можетъ сдѣлаться такъ малою, какъ угодно. Это выражаютъ такъ: *при неограниченномъ возрастаніи числа равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ единицу  $B$ , соизмѣримыя длины  $A_1$  и  $A_2$  стремятся къ общему предѣлу, который есть несоизмѣримая длина  $A$ .* Числа, выражающія длины  $A_1$  и  $A_2$ , также при этомъ стремятся къ некоторому общему предѣлу, называемому несоизмѣримымъ числомъ. Это число принимаютъ за точную мѣру несоизмѣримой длины  $A$ .

Сказанное объ измѣреніи длины прямой вполнѣ применимо къ измѣренію всякой величины, напр., дуги, угла и пр.

**1.11. Отношеніе.** *Отношеніемъ двухъ значений  $A$  и  $B$  одной и той же величины наз. число, измѣряющее  $A$ , когда  $B$  принято за единицу.*

Такъ, если говорятъ, что отношеніе прямой  $A$  къ другой прямой  $B$  есть  $2\frac{3}{4}$ , то это значить, что  $A$  равна  $2\frac{3}{4} B$ , т.-е.  $A$  содержитъ въ себѣ 2 раза  $B$ , причемъ получается остатокъ, равный  $\frac{3}{4} B$ .

Когда  $A$  соизмѣримо съ  $B$ , отношеніе  $A$  къ  $B$  можно выразить точно, цѣлымъ или дробнымъ числомъ; въ противномъ случаѣ его выражаютъ приближенно съ желасмою точностью. Такъ, если хотятъ найти отношеніе  $A$  къ  $B$  съ точностью до  $\frac{1}{10}$ , то дѣлятъ  $B$  на 10 равныхъ частей и узнаютъ наибольшее содержаніе  $\frac{1}{10} B$  въ  $A$ ; если это будетъ, положимъ, число 27, то  $\frac{27}{10}$  или  $2\frac{7}{10}$  будутъ приближенные значенія отношенія  $A$  къ  $B$ , съ точностью до  $\frac{1}{10}$ , первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ.

Когда  $A$  несоизмѣримо съ  $B$ , отношеніе между ними называютъ несоизмѣримымъ.

Два несоизмѣримыя отношенія считаются равными, если равны ихъ приближенные значенія, вычисленные съ произвольною, но одинаковою точностью.

**145. Свойства отношеній.** Если  $A$  и  $B$  измѣрены при помощи одной и той же единицы  $C$ , то отношеніе  $A$  къ  $B$  можно выразить *частнымъ* отъ дѣленія числа, измѣряющаго  $A$ , на число, измѣряющее  $B$  (это частное, какъ извѣстно изъ ариометики, наз. *кратнымъ* или *геометрическимъ отношеніемъ* двухъ чиселъ). Напр., положимъ, что  $A = \frac{7}{2}C$  и  $B = \frac{5}{3}C$ . Приведа эти дроби къ общему знаменателю, получимъ:

$$A = \frac{21}{6}C \quad B = \frac{10}{6}C$$

Отсюда видно, что  $\frac{1}{6}$  доля  $C$  содержится 10 разъ въ  $B$  и 21 разъ въ  $A$ ; значить,  $\frac{1}{10}$  доля  $B$  содержится въ  $A$  ровно 21 разъ, т.-е. отношеніе  $A$  къ  $B$  есть число  $\frac{21}{10}$ . Но это число получится, когда  $\frac{21}{6}$  раздѣлимъ на  $\frac{10}{6}$ ; значить:

$$\text{отношеніе } A \text{ къ } B = \frac{21}{6} : \frac{10}{6} = \frac{7}{2} : \frac{5}{3} = \frac{21}{10}.$$

Вообще, если измѣривъ  $A$  и  $B$  при помощи одной и той же единицы  $C$ , мы получимъ для  $A$  число  $m$ , а для  $B$  число  $n$ , то

$$\text{отношеніе } A \text{ къ } B = \frac{m}{n} \text{ *)}.$$

Вслѣдствіе этого отношеніе  $A$  къ  $B$  принято обозначать помощью тѣхъ же знаковъ, какіе употребляются для обозначенія отношенія чиселъ, а именно такъ:

$$A : B \text{ или } \frac{A}{B}.$$

Когда члены отношенія выражены числами, то къ нему могутъ быть отнесены всѣ свойства числовыхъ отношеній. Напр., если имѣемъ два равныя отношенія (т.-е. пропорцію), то произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, и т. п.

---

\*) Въ алгебрѣ доказывается, что это вѣрно и тогда, когда числа  $m$  и  $n$  несоизмѣримы. См. напр. „Элементарная алгебра“, сост. А. Киселевъ, 2-ое изданіе, стр. 161.

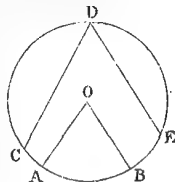


## ГЛАВА VII.

### Измѣреніе угловъ помощью дугъ.

**146. Опреѣленія.** Уголъ  $AOB$ , образованный двумя радіусами, наз. *центральный* уголъ; уголъ  $ODE$ , образованный двумя хордами, исходящими изъ одной точки окружности, наз. *вписанный* уголъ.

О центральномъ углѣ и дугѣ, заключенной между его сторонами, говорятъ, что они *соотвѣтствуютъ* другъ другу; о вписанномъ углѣ говорятъ, что онъ *описывается* на дугу, заключенную между его сторонами.

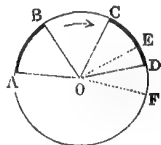


Черт. 110

**147. Теоремы.** Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

- 1°, если центральные углы равны, то и соотвѣтствующія имъ дуги равны;
- 2°, если центральные углы не равны, то большому изъ нихъ соотвѣтствуетъ большая дуга.

Пусть  $AOB$  и  $COD$  будутъ два центральные угла, равные или неравные. Повернемъ секторъ  $AOB$  вокругъ центра въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, настолько, чтобы радіусъ  $OA$  совмѣстился съ  $OC$ . Тогда, если центральные углы равны, то радіусъ  $OB$  совпадетъ съ  $OD$  и дуга  $AB$  съ дугою  $CD$ ; значитъ, эти дуги будутъ равны; если же центральные углы не равны, то радіусъ  $OB$  пойдетъ не по  $OD$ , а по какому-нибудь иному направленію, напр. по  $OE$  или по  $OF$ ; въ томъ и другомъ случаѣ большому углу, очевидно, будетъ соотвѣтствовать большая дуга.



Черт. 111

Теорема, доказанная вами для одного круга, остается вѣрною для равныхъ круговъ, потому что такіе круги ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются, кромѣ своего положенія.

**148. Обратныя предложенія.** Такъ какъ различныя случаи относительно величины двухъ центральныхъ угловъ сопровождаются различными выводами относительно величины соответствующихъ дугъ, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (48), а именно:

*Въ одномъ кругу или въ равныхъ кругахъ:*

1°, если дуги равны, то и соответствующіе имъ центральные углы равны;

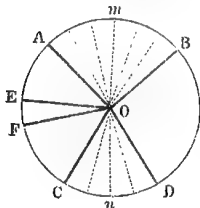
2°, если дуги не равны, то большей изъ нихъ соответствуетъ больший центральный уголъ.

Доказательство отъ противнаго предоставляемъ самимъ учащимся.

**149. Теорема.** Въ одномъ кругу или въ равныхъ кругахъ центральные углы относятся, какъ соответствующія имъ дуги.

Пусть  $\angle AOB$  и  $\angle COD$  будутъ два центральныхъ угла; требуется доказать, что

$$\angle AOB : \angle COD = \text{дуга } AB : \text{дуга } CD.$$



Черт. 112

1°. Допустимъ сначала, что дуги  $AB$  и  $CD$  соизмѣрны, т.-е. имѣютъ общую мѣру. Положимъ, что эта общая мѣра содержится  $m$  разъ въ дугѣ  $AB$  и  $n$  разъ въ  $CD$ ; тогда

$$\text{дуга } AB : \text{дуга } CD = m : n \quad [1].$$

Соединивъ точки дѣленія дугъ съ центромъ, мы раздѣлимъ центральные углы на равныя части (равнымъ дугамъ соответствуютъ равные центральные углы). Такъ какъ этихъ частей будетъ  $m$  въ углѣ  $AOB$  и  $n$  въ углѣ  $COD$ , то

$$\angle AOB : \angle COD = m : n \quad [2].$$

Сравнивая пропорціи [1] и [2], замѣчаемъ, что вторыя отношенія у нихъ равны; слѣд., равны и первыя отношенія, т.-е.

$$\angle AOB : \angle COD = \text{дуга } AB : \text{дуга } CD.$$

2°. Предположимъ теперь, что дуги  $AB$  и  $CD$  несоизмѣримы. Тогда и соотвѣтствующіе имъ центральные углы будутъ также несоизмѣримы. Дѣйствительно, если бы углы имѣли какую-нибудь общую мѣру, напр. уголъ  $EOF$ , то и дуги имѣли бы общую мѣру, именно дугу  $EF$ , что противорѣчитъ условію. Чтобы доказать равенство двухъ несоизмѣримыхъ отношеній, достаточно доказать равенство ихъ приближенныхъ значеній, вычисленныхъ съ произвольною, но одинаковою, точностью (144). Найдемъ приближенное значеніе отношенія дугъ  $AB$  и  $CD$  съ точностью до  $\frac{1}{n}$ . Для этого раздѣлимъ  $CD$  на  $n$  равныхъ частей и одну часть отложимъ на  $AB$  столько разъ, сколько можно. Пусть  $\frac{1}{n}$  доли  $CD$  содержится въ  $AB$  болѣе  $m$  разъ, но менѣе  $m+1$  разъ; тогда

$$\text{прибл. отнош. } \frac{\text{дуга } AB}{\text{дуга } CD} = \frac{m}{n} \text{ (съ нед.)}$$

Соединивъ точки дѣленія дугъ съ центромъ, мы раздѣлимъ уголъ  $COB$  на  $n$  такихъ равныхъ частей, какихъ въ углѣ  $AOB$  содержится болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$ ; слѣд.:

$$\text{прибл. отнош. } \frac{\angle AOB}{\angle COB} = \frac{m}{n} \text{ (съ нед.)}$$

Сравнивая приближенныя отношенія угловъ и дугъ, видимъ, что они равны при всякомъ  $n$ ; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

**150. Опредѣленіе.** Двѣ зависящія другъ отъ друга величины наз. *пропорціональными*, если зависимость между ними состоитъ въ слѣдующемъ: 1°, каждому значенію одной величины соотвѣтствуетъ только одно значеніе другой величины; 2°, отношеніе двухъ какихъ бы то ни было значеній одной величины равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній другой величины.

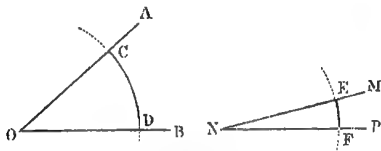
Изъ предыдущихъ теоремъ слѣдуетъ, что *центральный уголъ пропорціоналенъ соотвѣтствующей ему дугѣ*.

**151. Измѣреніе угловъ.** Измѣреніе угловъ сводится на измѣреніе соотвѣтствующихъ имъ дугъ слѣдующимъ образомъ.

За единицу угловъ берутъ уголъ, составляющій  $\frac{1}{90}$  часть прямого угла; эту единицу называютъ *угловыми градусами*.

За единицу дугъ одинаковаго радіуса берутъ такую дугу того же радіуса, которая соотвѣтствуетъ центральному углу, равному угловому градусу. Такая дуга наз. *дуговымъ градусомъ*. Такъ какъ прямому центральному углу соотвѣтствуетъ  $\frac{1}{4}$  окружности, то угловому градусу соотвѣтствуетъ  $\frac{1}{90}$  четверти окружности; значить, дуговой градусъ есть  $\frac{1}{360}$  цѣлой окружности.

Пусть требуется измѣрить уголъ  $AOB$ , т.-е. найти отношеніе этого угла къ угловому градусу  $MNP$ . Для этого



Черт. 113

опишемъ изъ вершинъ угловъ дуги  $CD$  и  $EF$  произвольнымъ, но одинаковымъ радіусомъ. Тогда (149) будемъ имѣть:

$$\angle AOB : \angle MNP = \text{— } CD : \text{— } EF.$$

Лѣвое отношеніе этой пропорціи есть число, измѣряющее уголъ  $AOB$  въ угловыхъ градусахъ (144); правое отношеніе есть число, измѣряющее дугу  $CD$  въ дуговыхъ градусахъ. Слѣд., эту пропорцію можно высказать такъ:

*Число, измѣряющее уголъ въ угловыхъ градусахъ, равно числу, измѣряющему соотвѣтствующую дугу въ дуговыхъ градусахъ.*

Для краткости эту фразу выражаютъ обыкновенно такъ:

*Уголъ измѣряется соотвѣтствующей ему дугой.*

**152. Подраздѣленіе градусовъ.** Градусы угла и дуга подраздѣляются на 60 равныхъ частей, называемыхъ *минутами* (угловыми или дуговыми); минуту подраздѣляютъ на 60 равныхъ частей, называемыхъ *секундами* (угловыми или дуговыми).

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что въ углѣ содержится столько угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько въ соответствующей ему дугѣ заключается дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ. Если, напр., въ дугѣ  $CD$  (черт. 113) содержится 40 град. 25 мин. и 13,5 секунды (дуговыхъ), то и въ углѣ  $AOB$  заключается 40 град. 25 мин. 13,5 сек. (угловыхъ); это выражаютъ сокращенно такъ:

$$\angle AOB = 40^{\circ}25'13,5''$$

обозначая значками ( $^{\circ}$ ), ( $'$ ) и ( $''$ ) соответственно градусы, минуты и секунды.

**153.** Такъ какъ прямой уголъ содержитъ  $90^{\circ}$ , то:

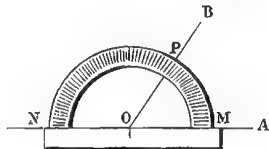
1°, сумма угловъ тр.-ка равна  $180^{\circ}$ ;

2°, сумма острыхъ угловъ прямоугольнаго тр.-ка равна  $90^{\circ}$ ;

3°, каждый уголъ равносторонняго тр.-ка равенъ  $60^{\circ}$ ;

4°, сумма угловъ выпуклаго многоугольника, имѣющаго  $n$  сторонъ, равна  $180^{\circ}(n - 2)$ ; и т. п.

**154. Транспортиръ.** Такъ наз. приборъ, употребляемый для измѣренія угловъ. Онъ представляетъ собою полукругъ, котораго дуга раздѣлена на 180 градусовъ. Чтобы измѣрить уголъ  $AOB$ , накладываютъ на него приборъ такъ, чтобы центръ полукруга совпадалъ съ вершиною угла, а радиусъ  $OM$  совпадалъ со стороною  $OA$ . Число градусовъ, содержащееся въ дугѣ  $PM$ , покажетъ величину угла  $AOB$ . При помощи транспортира



Черт. 114

можно также чертить уголъ, содержащій данное число градусовъ.

Конечно, на такомъ приборѣ нѣтъ возможности отсчитывать не только секунды, но и минуты; построение и измѣреніе можно выполнить только приближенно.

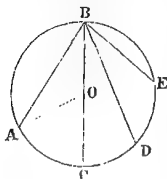
**155. Теорема.** Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, на которую онъ опирается.

Эту теорему надо понимать такъ: вписанный уголъ содержитъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, минутъ и се-

хундъ, сколько въ половинѣ дуги, на которую онъ опирается, заключается дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ

При доказательствѣ теоремы рассмотримъ особо три случая:

1°, *центръ*  $O$  (черт. 115) *лежитъ на сторонѣ вписаннаго угла*  $\angle BAC$ . — Проведемъ радиусъ  $AO$ , мы получимъ  $\triangle ABO$ , въ которомъ  $OA = OB$  (какъ радиусы) и, слѣд.,  $\angle ABO = \angle BAO$ . По отношенію къ этому тр.-ку уголъ  $AOC$  есть выплывй; поэтому онъ равенъ суммѣ угловъ  $ABO$  и  $BAO$ , или равенъ двойному углу  $ABO$ ; значить, уг.  $ABO$  равенъ *половинѣ* центральнаго угла  $AOC$ . Но послѣдній измѣряется дугою  $AC$  (151); слѣд., вписанный уголъ



Черт. 115

$ABO$  измѣряется половиною дуги  $AC$ .

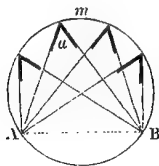
2°, *центръ*  $O$  *лежитъ между сторонами вписаннаго угла*  $\angle ABD$  (черт. 115).

Проведемъ діаметръ  $BC$ , мы раздѣлимъ уголъ  $ABD$  на два угла, изъ которыхъ, по доказанному въ первомъ случаѣ, одинъ измѣряется половиною дуги  $AC$ , а другой — половиною дуги  $CD$ ; слѣд., уголъ  $ABD$  измѣряется  $\frac{1}{2} (AC + CD)$ , т.-е.  $\frac{1}{2} AD$ .

3°, *центръ*  $O$  *лежитъ внѣ вписаннаго угла*  $\angle DBE$  (черт. 115).

Проведемъ діаметръ  $BC$ , мы будемъ имѣть:

$$\angle DBE = \angle CBE - \angle CBD.$$



Черт. 116

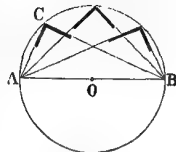
Но углы  $CBE$  и  $CBD$  измѣряются, по доказанному, половинами дугъ  $CE$  и  $CD$ ; слѣд., уг.  $DBE$  измѣряется  $\frac{1}{2} (CE - CD)$ , т.-е. половиною дуги  $DE$ .

**156. Слѣдствіе 1°.** Вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны (черт. 116), потому что каждый изъ нихъ измѣряется половиною одной и той же дуги. Если величину одного изъ такихъ угловъ обозначимъ  $a$ , то можно сказать, что сегментъ  $AmB$  *опирается* въ себя *уголъ, равный*  $a$ .

угловъ обозначимъ  $a$ , то можно сказать, что сегментъ  $AmB$

**157. Слѣдствіе 2°.** Вписанный уголъ, опирающийся на діаметръ, есть прямой (черт. 117), потому что каждый такой уголъ измѣряется половиною полуокружности и, слѣд., содержитъ  $90^\circ$ .

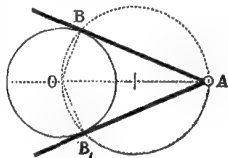
**158. Задача.** Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ  $AB$  и катету  $AC$  (черт. 117).



Черт. 117

На основаніи слѣдствія 2° эта задача рѣшается такъ: на гипотенузѣ  $AB$ , какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность и изъ конца  $A$  проводимъ хорду  $AC$ , равную данному катету. Тр.-къ  $AOB$  будетъ искомымъ.

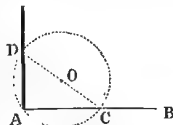
Это построеніе можно, между прочимъ, примѣнить въ томъ случаѣ, когда изъ данной точки  $A$  требуется провести касательную къ данной окружности  $O$  (см. § 126). Соединивъ  $A$  съ  $O$ , строить указаннымъ способомъ на прямой  $AO$ , какъ на гипотенузѣ, прямоугольный тр.-къ  $ABO$ , у котораго катетъ  $OB$  есть радіусъ данной окружности. Другой катетъ  $AB$  будетъ касательной, потому что онъ перпендикуляренъ къ радіусу  $OB$  въ концѣ его, лежащемъ на окружности.



Черт. 118

**159. Задача.** Изъ конца  $A$  данной прямой  $AB$ , не проходящей ея, возставить къ ней перпендикуляръ (черт. 119).

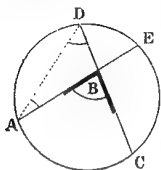
Взвъ въ прямой произвольную точку  $O$ , опишемъ изъ нея радіусомъ  $OA$  окружность; черезъ точку  $C$ , въ которой эта окружность пересѣкается съ прямой  $AB$ , проведемъ діаметръ  $CD$  и конецъ его  $D$  соединимъ съ  $A$ . Прямая  $AD$  будетъ искомымъ перпендикуляръ, потому что уголъ  $A$  прямой, такъ какъ онъ вписанный и опирается на діаметръ.



Черт. 119

**160. Теорема.** Уголъ, вершина котораго лежитъ внутри

круга, измѣряется полусуммою дугъ, изъ которыхъ одна заключена между его сторонами, а другая между продолженіями сторонъ.



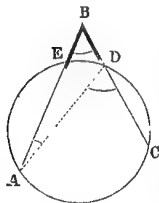
Черт. 120

Пусть вершина угла  $ABC$  лежитъ внутри круга. Продолживъ его стороны до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ  $D$  и  $E$ , докажемъ, что этотъ уголъ измѣряется половиною суммы дугъ  $AC$  и  $DE$ .—Проведа хорду  $AD$ , мы получимъ  $\triangle ADB$ , относительно котораго уголъ  $ABC$  есть внѣшній; слѣд.:

$$\angle ABC = \angle A + \angle D.$$

Но углы  $A$  и  $D$ , какъ вписанные, измѣряются половинами дугъ  $DE$  и  $AC$ ; поэтому уголъ  $ABC$  измѣряется полусуммою этихъ дугъ.

**161. Теорема.** Уголъ, вершина котораго лежитъ внѣ круга, измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.



Черт. 121

Пусть вершина угла  $ABC$  лежитъ внѣ круга. Требуется доказать, что этотъ уголъ измѣряется половиною разности дугъ  $AC$  и  $ED$ .—Проведа хорду  $AD$ , мы получимъ  $\triangle ABD$ , относительно котораго уголъ  $ADC$  есть внѣшній; слѣд.:

$$\angle B = \angle ADC - \angle A.$$

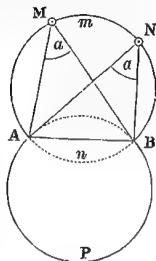
Но углы  $ADC$  и  $A$ , какъ вписанные, измѣряются половинами дугъ  $AC$  и  $ED$ ; поэтому уголъ  $B$  измѣряется полуразностью этихъ дугъ.

**162. Слѣдствіе.** Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный отръзокъ прямой виденъ подъ даннымъ угломъ  $\alpha$  и которыя расположены по одну сторону отъ этого отръзка, есть дуга сегмента, охватывающая уголъ  $\alpha$ .

Пусть  $M$  будетъ одна изъ точекъ, изъ которыхъ данный отръзокъ  $AB$  виденъ подъ угломъ  $\alpha$ , т. е. допустить, что прямая



$MA$  и  $MB$  образуют угол  $\alpha$ . Проведемъ черезъ точки  $A$ ,  $M$  и  $B$  окружность. Тогда часть этой окружности, именно  $AmB$ , будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ. Дѣйствительно, изъ каждой точки этой дуги прямая  $AB$  видна подъ угломъ  $\alpha$ , потому что всѣ вписанные углы, опирающіеся на  $AB$ , равны углу  $AMB$ , который есть  $\alpha$ . Обратно: всякая точка, напр.  $N$ , изъ которой прямая  $AB$  видна подъ угломъ  $\alpha$ , и которая расположена по ту же сторону отъ  $AB$ , какъ и точка  $M$ , должна находиться на дугѣ сегмента  $AmB$ , потому что въ противномъ случаѣ уголъ  $ANB$  не измѣрялся бы половиною дуги  $AnB$  (160 и 161) и слѣд., не былъ бы равенъ  $\alpha$ .



Черт. 122

По другую сторону отъ  $AB$  существуютъ также точки, изъ которыхъ эта прямая видна подъ угломъ  $\alpha$ ; онѣ расположены на дугѣ сегмента  $APB$ , равнаго сегменту  $AmB$ , но расположеннаго по противоположную сторону отъ  $AB$ .

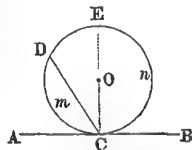
**163. Теорема.** Уголъ, составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его.

Пусть уголъ  $ACD$  составленъ касательною  $AC$  и хордою  $CD$ ; требуется доказать, что этотъ уголъ измѣряется половиною дуги  $CmD$ .—Проведемъ диаметръ  $CE$ , будемъ имѣть:

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

Уголъ  $ACE$ , какъ прямой (124), измѣряется половиною полуокружности  $CmE$ ; уголъ  $DCE$ , какъ вписанный, измѣряется половиною дуги  $DE$ ; слѣд., уголъ  $ACD$  измѣряется полуразностью дугъ  $CmE$  и  $DE$ , т.-е. половиною дуги  $DC$ .

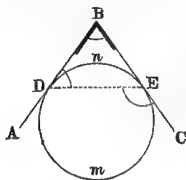
Подобнымъ образомъ можно доказать, что уголъ  $BCD$ , также составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги  $CmD$ ; разница въ доказательствѣ будетъ только



Черт. 123

та, что этот угол надо рассматривать не как разность, а как сумму прямого угла  $BCE$  и острого  $EOD$ .

**164. Теорема.** Угол, составленный двумя касательными, измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между точками касанія.



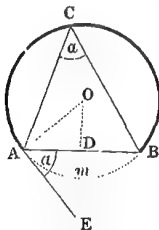
Черт. 124

Пусть угол  $ABC$  составленъ двумя касательными; требуется доказать, что онъ измѣряется половиною разности дугъ  $DmE$  и  $DnE$  ( $D$  и  $E$  суть точки касанія).—Проведемъ хорду  $DE$ , мы получимъ  $\triangle DBE$ , относительно котораго уголъ  $CED$  есть внѣшній; слѣд.:

$$\angle B = \angle CED - \angle BDE.$$

Но углы  $CED$  и  $BDE$ , какъ составленные касательною и хордою, измѣряются соответственно половинами дугъ  $EmD$  и  $DnE$ ; поэтому уголъ  $B$  измѣряется полуразностью этихъ дугъ.

**165. Задача.** На данной прямой  $AB$  построить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ  $a$  (черт. 125).



Черт. 125

Предположимъ, что задача рѣшена; пусть сегментъ  $ACB$  будетъ такой, который вмѣщаетъ въ себѣ уголъ  $a$ . Центр  $O$  этого сегмента долженъ лежать на перпендикулярѣ  $DO$ , восстановленномъ изъ середины прямой  $AB$ . Съ другой стороны онъ долженъ лежать и на перпендикулярѣ  $AO$ , восстановленномъ къ касательной  $AE$  изъ точки касанія  $A$ . Поэтому положеніе центра опредѣлится, если мы сумѣемъ построить касательную  $AE$ . Уголъ  $BAE$ , составленный касательною и хордою, измѣряется половиною дуги  $AmB$ ; вписанный уголъ  $ACB$  также измѣряется половиною этой дуги; значить,  $\angle BAE = \angle ACB$ . Но послѣдній уголъ, по условію, долженъ равняться  $a$ ; слѣд., и  $\angle BAE = a$ , а потому положеніе касательной  $AE$  опредѣлено. Отсюда выводимъ слѣдующее по-

ложеніе центра опредѣлится, если мы сумѣемъ построить касательную  $AE$ . Уголъ  $BAE$ , составленный касательною и хордою, измѣряется половиною дуги  $AmB$ ; вписанный уголъ  $ACB$  также измѣряется половиною этой дуги; значить,  $\angle BAE = \angle ACB$ . Но послѣдній уголъ, по условію, долженъ равняться  $a$ ; слѣд., и  $\angle BAE = a$ , а потому положеніе касательной  $AE$  опредѣлено. Отсюда выводимъ слѣдующее по-

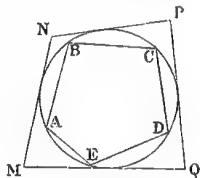
строение: при концѣ прямой  $AB$  строимъ уголъ  $BAE$ , равный углу  $\alpha$ ; къ середнѣ прямой  $AB$  восстанавливаемъ перпендикуляръ  $DO$  и изъ точки  $A$  перпендикуляръ къ  $AE$ . Пересѣченіе этихъ двухъ перпендикуляровъ принимаемъ за центръ и радиусомъ  $OA$  описываемъ окружность. Сегментъ  $AOB$  будетъ искомый, потому что всякій вписанный въ немъ уголъ равенъ углу  $BAE$ , т.-е. углу  $\alpha$ .

## ГЛАВА VIII.

### Вписанные и описанные многоугольники.

**166. Опредѣленіе.** Если вершины какого-нибудь многоугольника  $ABCDE$  лежатъ на окружности, то говорятъ, что этотъ мн.-къ *описанъ* въ окружность, или что окружность *описана* около него.

Если стороны какого-нибудь многоугольника  $MNPQ$  касаются окружности, то говорятъ, что этотъ мн.-къ *описанъ* около окружности, или что окружность *описана* въ него.



Черт. 126

**167. Теоремы.** 1°. *Около всякаго треугольника можно описать окружность и притомъ только одну.*

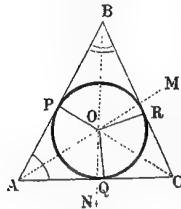
2°. *Во всякій треугольникъ можно вписать окружность и притомъ только одну.*

Пусть  $ABC$  будетъ какой нибудь тр.-къ; требуется доказать: 1°, что около него можно описать окружность и притомъ только одну и 2°, что въ него можно вписать окружность и притомъ только одну.

1°. Вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  суть три точки, не лежащія на одной прямой; а черезъ такія точки, какъ мы видѣли (109), всегда можно провести окружность и притомъ только одну.

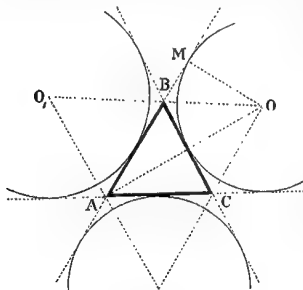
2°. Если возможна такая окружность, которая касалась бы всѣхъ сторонъ тр.-ка  $ABC$ , то ея центръ долженъ быть

точкой, одинаково удаленной от этихъ сторонъ. Докажемъ, что такая точка существуетъ. Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ сторонъ  $AB$  и  $AC$ , есть биссектриса  $AM$  угла  $A$  (63); геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ сторонъ  $BA$  и  $BC$ , есть биссектриса  $BN$  угла  $B$ . Эти двѣ биссектрисы, находясь внутри замкнутого пространства (треугольника), должны пересѣчься внутри его, въ пѣкоторой точкѣ  $O$ . Эта точка и будетъ равноудаленной отъ сторонъ тр.-ка, такъ какъ она заразѣ находится на обоихъ геометрич. мѣстахъ.



Черт. 127

Итакъ, чтобы вписать кругъ въ тр.-къ, дѣлимъ какіе-нибудь два угла его, напр.  $A$  и  $B$ , пополамъ и точку пересѣченія биссектрисъ беремъ за центръ. Радиусомъ будетъ служить одинъ изъ перпендикуляровъ  $OP$ ,  $OQ$ ,  $OR$ , опущенныхъ изъ центра на стороны тр.-ка. Окружность каснется сторонъ въ точкахъ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , такъ какъ стороны въ этихъ точкахъ перпендикулярны къ радиусамъ (123). Другой вписанной окружности не можетъ быть, такъ какъ двѣ биссектрисы могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, а изъ одной точки на прямую можно опустить только одинъ перпендикуляръ.



Черт. 128

**168. Слѣдствіе.** Точка  $O$ , находясь на одинаковомъ разстояніи отъ сторонъ  $AC$  и  $BC$  (черт. 127), должна лежать на биссектрисѣ угла  $C$  (61); слѣд.:

*биссектриссы трехъ угловъ треугольника сходятся въ одной точкѣ.*

**169. Вѣзписанные круги.** Такъ называются круги (черт. 128), которые касаются одной сто-

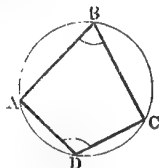
роны тр-ка и продолжений двухъ другихъ сторонъ (они лежатъ *вне* тр-ка, вслѣдствіе чего и получили названіе *внеписанныхъ*). Такихъ круговъ для всякаго треугольника можетъ быть три. Чтобы построить ихъ, проводятъ биссектрисы внѣшнихъ угловъ тр-ка  $ABC$  и точки ихъ пересѣченій берутъ за центры. Такъ, центромъ окружности, вписанной въ уголъ  $A$ , будетъ точка  $O$ , т.-е. пересѣченіе биссектрисъ  $BO$  и  $CO$  внѣшнихъ угловъ, не смежныхъ съ  $A$ ; радіусомъ этой окружности будетъ перпендикуляръ  $OM$ , опущенный изъ  $O$  на какую-либо сторону треугольника.

**130. Теоремы.** 1°. Во всякомъ вписанномъ четырехугольнике сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

2°. Обратно: около четырехугольника можно описать окружность, если въ немъ сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

1°. Пусть  $ABCD$  будетъ вписанный четырехугольникъ; требуется доказать, что  $\angle B + \angle D = 2d$  и  $\angle A + \angle C = 2d$ .

Углы  $B$  и  $D$ , какъ вписанные, измѣряются: первый — половиною дуги  $ADC$ , второй — половиною дуги  $ABC$ ; слѣд., сумма  $B + D$  измѣряется полусуммою дугъ  $ADC$  и  $ABC$ , т.-е. половиною окружности; значитъ,  $B + D = 2d$ . Подобно этому убодимся, что  $A + C = 2d$ .



Черт. 129

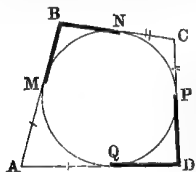
2°. Пусть  $ABCD$  (черт. 129) будетъ такой четырехугольникъ, у котораго  $B + D = 2d$ . Требуется доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность. — Черезъ какія-нибудь три его вершины, напр.  $A$ ,  $B$  и  $C$ , проведемъ окружность (что всегда можно сдѣлать). Тогда четвертая вершина  $D$  непременно окажется на этой окружности, потому что въ противномъ случаѣ уголъ  $D$  лежалъ бы своею вершиною или внутри круга, или внѣ его, и тогда этотъ уголъ не измѣрялся бы половиною дуги  $ABC$  (160 и 161); поэтому сумма  $B + D$  не измѣрялась бы полусуммою дугъ  $ADC$  и  $ABC$ , т.-е. сумма  $B + D$  не равнялась бы  $2d$ , что противорѣчитъ условію.

**131. Слѣдствія.** 1°. Изъ всѣхъ параллелограммовъ можно описать окружность только около прямоугольника.

2°. Около трапеціи можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.

**132. Теоремы.** 1°. Во всякомъ описанномъ четырехугольникѣ суммы противоположныхъ сторонъ равны.

2°. Обратно: въ четырехугольникъ можно вписать окружность, если въ немъ равны суммы противоположныхъ сторонъ.



Черт. 130

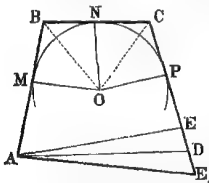
1°. Пусть  $ABCD$  будетъ описанный четырехугольникъ, т.-е. стороны его касаются окружности; требуется доказать, что  $AB + CD = BC + AD$ . Обозначимъ точки касанія черезъ  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$ . Такъ какъ двѣ касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности, равны (127), то  $AM = AQ$ ,  $BM = BN$ ,  $CN = CP$  и  $DP = DQ$ . Слѣд.

$$AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC$$

$$\text{т.-е. } AB + CD = AD + BC.$$

2°. Пусть  $ABCD$  будетъ такой четырехугольникъ (черт. 131), у котораго:  $AB + CD = AD + BC$ .

Требуется доказать, что въ него можно вписать окружность. — Проведемъ



Черт. 131

биссектриссы  $BO$  и  $CO$  двухъ угловъ  $B$  и  $C$ . Эти прямыя должны пересѣчься, потому что сумма угловъ  $\angle BO$  и  $\angle CO$  меньше  $180^\circ$  (такъ какъ  $B + C < 180^\circ$ ). Точка пересѣканія биссектриссъ должна быть одинаково удалена отъ сторонъ  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ; поэтому, если эту точку возьмемъ за центръ, а за радиусъ одинъ изъ трехъ равныхъ перпендикуляровъ  $OM$ ,  $ON$ ,  $OP$ , опущенныхъ изъ  $O$  на стороны угловъ  $B$  и  $C$ , то окружность каснется сторонъ  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ .

Докажемъ, что она каснется и четвертой стороны  $AD$ . Для этого предположимъ, что касательная, проведенная къ нашей окружности изъ точки  $A$ , будетъ не  $AD$ , а какая-нибудь иная прямая, напр.  $AE$ . Тогда получится описанный четырехугольникъ  $ABCE$ , въ которомъ, по доказанному выше, будемъ имѣть:

$$BC + AE = AB + CE$$

Но по условию:

$$BC + AD = AB + CD$$

Вычтя почленно первое равенство из второго, найдемъ:

$$AD - AE = CD - CE = DE$$

т. е. разность двухъ сторонъ  $\triangle ADE$  равна третьей сторонѣ  $DE$ , что невозможно (50); значитъ, нельзя допустить, чтобы касательною къ нашей окружности была прямая  $AE$ , лежащая ближе къ центру  $O$ , чѣмъ  $AD$ . Такъ же можно доказать, что касательною не могутъ быть никакая прямая  $AB$ , лежащая дальше отъ центра, чѣмъ  $AD$ ; значитъ,  $AD$  должна касаться окружности, т. е. въ четырехугольникъ  $ABCD$  можно вписать окружность.

**178. Слѣдствіе.** Изъ всѣхъ параллелограммовъ окружность можно описать только въ ромбѣ и квадратѣ.

## ГЛАВА IX.

### Четыре замѣчательныя точки въ треугольникѣ.

**174.** Мы видѣли, что во всякомъ треугольникѣ:

1<sup>о</sup>, перпендикуляры къ серединамъ сторонъ сходятся въ одной точкѣ, которая есть центръ описаннаго круга (110);

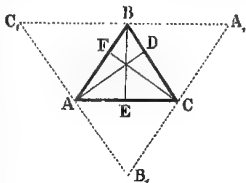
2<sup>о</sup>, биссектрисы угловъ сходятся въ одной точкѣ, которая есть центръ вписаннаго круга (168).

Слѣдующія двѣ теоремы указываютъ еще двѣ замѣчательныя точки треугольника: 3<sup>о</sup>, пересѣченіе высотъ и 4<sup>о</sup>, пересѣченіе медіанъ.

**175. Теорема.** Три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

Черезъ каждую вершину тр.-ка  $ABC$  (черт. 132) проведемъ прямую, параллельную противоположной сторонѣ его. Тогда получимъ вспомога- тельный  $\triangle A_1B_1C_1$ , къ сторонамъ ко- торого высоты даннаго тр.-ка пер- пендикулярны. Такъ какъ  $C_1B = AC = BA_1$  (какъ противоположныя стороны параллелограмма), то точка  $B$  есть средина стороны  $A_1C_1$ . По- добно этому убѣдимся, что  $C$  есть средина  $A_1B_1$  и  $A$  — средина  $B_1C_1$ . Такимъ образомъ, высоты  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  служатъ перпендикулами къ срединамъ сторонъ тр.-ка  $A_1B_1C_1$ ; а такіе перпендикулы, какъ известно, пересѣкаются въ одной точкѣ.

**Замѣчаніе.** Точка, въ которой пересѣкаются высоты треугольника, наз. *ортосцентромъ*.

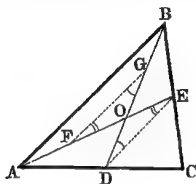


Черт. 132

**136. Теорема.** Тримедианы треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ; эта точка отсѣкаетъ отъ каждой медианы третью часть, считая отъ соответствующей стороны.

Возьмемъ въ тр.-кѣ  $ABC$  какія-нибудь двѣ медианы, напр.  $AE$  и  $BD$ , пересѣкающіяся въ точкѣ  $O$ , и докажемъ, что

$$OD = \frac{1}{3}BD \text{ и } OE = \frac{1}{3}AE.$$



Черт. 183

Для этого, раздѣливъ  $OA$  и  $OB$  пополамъ въ точкахъ  $F$  и  $G$ , проведемъ  $FG$  и  $DE$ . Такъ какъ прямая  $FG$  соединяетъ середины двухъ сторонъ тр.-ка  $ABO$ , то (102)  $FG \parallel AB$  и  $FG = \frac{1}{2}AB$ . Прямая  $DE$  также соединяетъ середины двухъ сторонъ тр.-ка  $ABC$ ; поэтому:  $DE \parallel AB$  и  $DE = \frac{1}{2}AB$ . Отсюда выводимъ, что  $DE \parallel FG$  и  $DE = FG$ . Сравнивая теперь тр.-ки  $ODE$  и  $OFG$ , замѣчаемъ, что у нихъ  $DE = FG$  и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, равны (какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ прямыхъ), слѣд., эти тр.-ки равны. Изъ равенства ихъ выводимъ:  $OD = OG = BG$  и  $OE = OF = AF$ ; поэтому  $OD = \frac{1}{3}BD$  и  $OE = \frac{1}{3}AE$ .

Такъ какъ это доказательство можетъ быть повторено о любой парѣ медианъ, то заключаемъ, что всѣ медианы треугольника сходятся въ одной точкѣ, которая отъ каждой изъ нихъ отсѣкаетъ третью часть, считая отъ соответствующей стороны.

**Замѣчаніе.** Изъ физики извѣстно, что пересѣченіе медианъ тр.-ка есть его центр тяжести.

## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

### Доказать теоремы:

148. Если двѣ окружности касаются, то всякая сѣкущая, проведенная черезъ точку касанія, отсѣкаетъ отъ окружностей двѣ противолежащія дуги одинаковаго числа градусовъ.

149. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ двѣ сѣкущія и концы ихъ соединимъ хордами, то эти хорды параллельны.

150. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ какую-либо сѣкущую, то касательныя, проведенныя въ концахъ этой сѣкущей, параллельны.

151. Если основанія высотъ тр.-ка соединимъ прямыми, то получимъ новый тр.-къ, для котораго высоты перваго тр.-ка служатъ биссектрисами.

152. Если около тр.-ка опишемъ окружность и изъ произвольной точки ея опустимъ перпендикуляры на стороны тр.-ка, то ихъ основанія лежатъ на одной прямой (прямая Симпсона).



### Задачи на построение.

153. На данной неопредѣленной прямой найти точку, из которой круглая данная конечная прямая была бы видна под данным углом.

154. Построить  $\triangle$  по основанию, углу при вершинѣ и высотѣ.

155. Къ дугѣ даннаго сектора провести касательную, чтобы часть ея, заключенная между продолженными радіусами (ограничивающими секторъ), равнялась данной длинѣ (свести эту задачу на предыдущую).

156. Построить  $\triangle$  по основанию, углу при вершинѣ и медианѣ, проведенной къ основанию.

157. Даны по величинѣ и положенію двѣ конечныя прямыя  $a$  и  $b$ . Найти такую точку, из которой прямая  $a$  была бы видна под даннымъ угломъ  $\alpha$ , а прямая  $b$  подъ даннымъ угломъ  $\beta$ .

158. Въ тр-ѣ найти точку, изъ которой его стороны были бы видны подъ равными углами (указаніе: обратить вниманіе на то, что каждый изъ этихъ угловъ долженъ равняться  $\frac{1}{3}\alpha$ ).

159. Построить  $\triangle$  по углу при вершинѣ, высотѣ и медианѣ, проведенной къ основанию (указаніе: продолживъ медиану на равное разстояніе и соединивъ полученную точку съ концами основанія, разсмотрѣть образовавшійся параллелограммъ).

160. Построить  $\triangle$ , въ которомъ даны: основаніе, прилежащій къ нему уголъ и уголъ, составленный медианою, проведенною изъ вершины даннаго угла, со стороною, къ которой эта медиана проведена.

161. Построить параллелограммъ по двумъ его діагоналямъ и одному углу.

162. Построить  $\triangle$  по основанию, углу при вершинѣ и суммѣ или разности двухъ другихъ сторонъ.

163. Построить четырехугольникъ по двухъ діагоналямъ, двумъ соседнимъ сторонамъ и углу, образованному остальными двумя сторонами.

164. Даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Провести черезъ  $A$  такую прямую, чтобы разстояніе между перпендикулярами, опущенными на эту прямую изъ точекъ  $B$  и  $C$ , равнялось данной длинѣ.

165. Въ данныйъ кругъ вписать  $\triangle$ , у котораго два угла даны.

166. Около даннаго круга описать  $\triangle$ , у котораго два угла даны.

167. Построить  $\triangle$  по радіусу описаннаго круга, углу при вершинѣ и высотѣ.

168. Вписать въ данныйъ кругъ  $\triangle$ , у котораго извѣстны: сумма двухъ сторонъ и уголъ, противолежащій одной изъ этихъ сторонъ.

169. Вписать въ данныйъ кругъ четырехугольникъ, котораго сторона и два угла, не прилежащіе къ этой сторонѣ, даны.

170. Въ данныйъ ромбъ вписать кругъ.

171. Въ равносторонній  $\triangle$  вписать три круга, попарно касающія другъ друга и изъ которыхъ каждый касается двухъ сторонъ тр-ка.

172. Построить четырехугольникъ, который можно было бы вписать въ окружность, по тремъ его сторонамъ и одной діагонали.

173. Построить ромб по данным: сторонам и радиусу вписанного круга.

174. Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный  $\triangle$ .

175. Построить равнобедренный  $\triangle$  по основанию и радиусу вписанного круга.

176. Построить  $\triangle$  по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

177. То же — по трем медианам.

178. Дана окружность и на ней три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Вписать в эту окружность такой  $\triangle$ , чтобы его биссектрисы, при продолжении, встречались на окружности в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

179. Та же задача, с заменой биссектрис тр-ка его высотами.

180. Дана окружность и на ней три точки  $M$ ,  $N$  и  $P$ , в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, исходящая из одной вершины вписанного тр-ка. Построить этот  $\triangle$ .

181. На окружности даны две точки  $A$  и  $B$ . Из этих точек провести две параллельные хорды, сумма дава.

### Задачи на вычисление.

182. Вычислить вписанный угол, опирающийся на дугу, равную  $\frac{1}{12}$  части окружности.

183. Круг раздѣлен на два сегмента хордою, дѣлящею окружность на части в отношеніи 5 : 7. Вычислить углы, которые вмѣщаются этими сегментами.

184. Две хорды пересекаются под углом в  $36^\circ 15' 32''$ . Вычислить в градусах, минутах и секундах две дуги, заключенныя между сторонами этого угла и ихъ продолженіями, если одна изъ этихъ дугъ относится къ другой, какъ 3 : 2.

185. Уголъ, составленный двумя касательными, проведенными изъ одной точки къ окружности, равенъ  $25^\circ 15'$ . Вычислить дуги, заключенныя между точками касанія.

186. Вычислить уголъ, составленный касательною и хордою, если хорда дѣлитъ окружность на две части, относящіяся какъ 3 : 7.

187. Две окружности одинаковаго радиуса пересекаются под угломъ в  $\frac{2}{3}\pi$ ; определить в градусахъ меньшую изъ дугъ, заключающихся между точками пересѣченія.

*Примѣчаніе.* Уголъ двухъ пересекающихся дугъ наз. уголъ, составленный двумя касательными, проведенными къ этимъ дугамъ изъ точки пересѣченія.

188. Изъ одного конца діаметра проведена касательная, а изъ другого съѣзжающая, которая съ касательною составляетъ уголъ в  $20^\circ 30'$ . Какъ велика меньшая изъ дугъ, заключенныхъ между касательною и съѣзжающею.

# КНИГА III.

## ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ.

### ГЛАВА I.

#### Подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ.

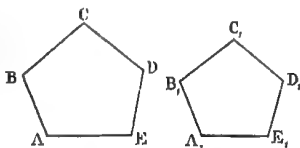
**177. Опреѣленія.** Два многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ называются *подобными*, если углы одного равны соответственно угламъ другого и сходственные стороны ихъ пропорціональны.

*Сходственными* называются тѣ стороны, которыя прилежатъ къ равнымъ угламъ. Выраженіе: „сходственные стороны пропорціональны“ означаетъ, что отношеніе какихъ-нибудь двухъ сходственныхъ сторонъ равно отношенію всякихъ другихъ сходственныхъ сторонъ.

Такимъ образомъ, многоугольники  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  считаются подобными, если они удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$1^\circ, \quad A = A_1, \quad B = B_1, \\ C = C_1, \quad D = D_1, \quad E = E_1$$

$$2^\circ, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$$



Черт. 134

Этимъ условіямъ удовлетворяютъ, напр., всякіе два квадрата или всякіе два равносторонніе треугольника.

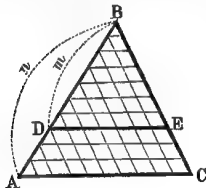
Замѣтимъ, что могутъ быть два многоугольника, у которыхъ углы соответственно равны, но стороны не пропорціональны, и наоборотъ; напр., у квадрата и прямоугольника углы соответственно равны, а стороны не пропорціональны; у квадрата и ромба, наоборотъ, стороны пропорціональны, а углы не равны. Въ этомъ отношеніи треугольники рѣзко вы-

дѣлятся изъ многоугольниковъ: у нихъ, какъ увидимъ ниже, равенство угловъ влечетъ за собою пропорціональность сторонъ и обратно.

Изъ опредѣленія подобія слѣдуетъ, что если изъ двухъ равныхъ многоугольниковъ одинъ подобенъ третьему, то и другой подобенъ ему.

**178. Лемма.\*)** *Прямая, проведенная внутри треугольника параллельно какой-нибудь его сторонѣ, отсѣкаетъ отъ него другой треугольникъ, подобный первому.*

Пусть въ тр.-кѣ  $ABC$  проведена прямая  $DE \parallel AC$ ; требуется доказать, что  $\triangle DBE$  подобенъ  $\triangle ABC$ . — Углы этихъ тр.-ковъ соответственно равны между собою ( $B$  общій уголъ,  $D = A$  и  $E = C$ , какъ углы соответственные при параллельныхъ прямыхъ). Остается доказать, что сходственные стороны пропорціональны. Рассмотрим отдѣльно два случая.



Черт. 135

1°, стороны  $AB$  и  $DB$  имютъ общую мѣру. Раздѣлимъ  $AB$  на части, равныя этой общей мѣрѣ. Тогда  $BD$  раздѣлится на цѣлое число такихъ частей. Пусть этихъ частей содержится  $m$  въ  $BD$  и  $n$  въ  $AB$ . Проведемъ изъ точекъ дѣленія рядъ прямыхъ, параллельныхъ  $AC$ , и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ  $BC$ . Тогда  $BE$  и  $BC$  раздѣлятся на равныя части (100), которыхъ будетъ  $m$  въ  $BE$  и  $n$  въ  $BC$ . Точно также  $DE$  раздѣлится на  $m$  равныхъ частей, а  $AC$  на  $n$  равныхъ частей, причемъ части  $DE$  равны частямъ  $AC$  (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ). Теперь очевидно, что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m}{n}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{n}; \quad \frac{DE}{AC} = \frac{m}{n}$$

Слѣд.: 
$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

Такимъ образомъ у тр.-ковъ  $BDE$  и  $ABC$  углы соответственно

\*) Леммою наз. вспомогательная теорема, излагаемая то ѣко для того, чтобы при ея помощи доказать послѣдующія теоремы.

равны и сходственные стороны пропорциональны; значитъ, они подобны.

2°, стороны  $AB$  и  $BD$  не имеютъ общей мѣры. Найдѣмъ приближенное значеніе каждаго изъ отношеній:

$$\frac{DB}{AB}, \frac{BE}{BC} \text{ и } \frac{DE}{AC}$$

съ произвольною точностью до  $\frac{1}{n}$ . Для этого раздѣлимъ  $AB$  на  $n$  равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ  $AC$ , и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ  $BC$ . Тогда каждая изъ сторонъ  $BC$  и  $AC$  раздѣлится также на  $n$  равныхъ частей (100).

Предположимъ теперь, что  $\frac{1}{n}$  доля  $AB$  содержится въ  $BD$  болѣе  $m$  разъ, но менѣе  $m+1$  разъ; тогда, какъ видно изъ чертежа,  $\frac{1}{n}$  доля  $BC$  содержится въ  $BE$  также болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$  разъ, и  $\frac{1}{n}$  доли  $AC$  содержится въ  $DE$  болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$  разъ. Слѣд.:

$$\text{прибл. отн. } \frac{BD}{BA} = \frac{m}{n}; \quad \text{прибл. отн. } \frac{BE}{BC} = \frac{m}{n}; \quad \text{прибл. отн. } \frac{DE}{AC} = \frac{m}{n}$$

Такимъ образомъ, приближенные отношенія, вычисленные съ произвольною, но одинаковою точностью, равны другъ другу; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

**139. Теорема.** Два треугольника подобны, если:

1°, два угла одного соответственно равны двумъ угламъ другого;

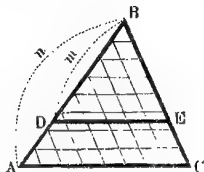
или 2°, две стороны одного пропорциональны двумъ сторонамъ другого, и углы, лежащіе между этими сторонами, равны;

или 3°, три стороны одного пропорциональны тремъ сторонамъ другого.

1°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будутъ два тр.-ка, у которыхъ:

$$A = A_1, B = B_1 \text{ и, слѣд., } C = C_1 \text{ (черт. 137).}$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Отложимъ на  $AB$  часть  $BD$ , равную  $A_1B_1$ , и проведемъ  $DE \parallel AC$ .



Черт. 186

Тогда получимъ вспомогательный тр.-къ  $DBE$ , который согласно предыдущей леммѣ, подобенъ тр.-ку  $ABC$ . Съ другой стороны  $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$ , потому что у нихъ:  $BD = A_1B_1$  (по построению),  $B = B_1$  (по условию) и  $D = A_1$  (потому что  $D = A$  и  $A = A_1$ ).

Но если изъ двухъ равныхъ тр.-ковъ одинъ подобенъ третьему, то и другой ему подобенъ; слѣд.,  $\triangle A_1B_1C_1$  подобенъ  $\triangle ABC$ .  
2°. Пусть въ тр.-кахъ  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  дано (черт. 138):

$$B = B_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Отложимъ снова часть  $BD$ , равную  $A_1B_1$ , и проведемъ  $DE \parallel AC$ . Тогда получимъ вспомогательный  $\triangle BDE$ , подобный  $\triangle ABC$ . Докажемъ, что онъ равенъ  $\triangle A_1B_1C_1$ . Изъ подобія тр.-ковъ  $DBE$  и  $ABC$  слѣдуетъ (черт. 138):

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE} \quad (2)$$

Сравнивая этотъ рядъ равныхъ отношеній съ даннымъ рядомъ (1), замѣчаемъ, что первыя отношенія обоихъ рядовъ одинаковы ( $DB = A_1B_1$  по построению); слѣдовательно, остальные отношенія этихъ рядовъ также равны, т.-е.

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}; \text{ откуда } B_1C_1 = BE$$

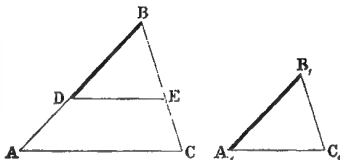
Теперь видимъ, что тр.-ки  $DBE$  и  $A_1B_1C_1$  имѣютъ по равному углу ( $B = B_1$ ), заключенному между равными сторонами; значить, эти тр.-ки равны. Но  $\triangle DBE$  подобенъ и  $\triangle A_1B_1C_1$  подобенъ  $\triangle ABC$ .

3°. Пусть въ тр.-кахъ  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (черт. 139) дано:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Сдѣлавъ построеніе такое же, какъ и прежде, докажемъ, что  $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$ . Изъ подобія тр.-ковъ  $DBE$  и  $ABC$  слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE} \quad [2]$$



Черт. 139

Сравнивая этотъ рядъ съ даннымъ рядомъ

[1], замѣчаемъ, что первыя отношенія у нихъ равны; слѣд., и остальные отношенія равны, т.-е.

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}; \text{ откуда: } B_1C_1 = BE$$

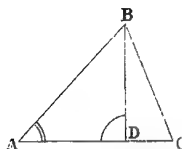
$$\text{и } \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE}; \text{ откуда: } A_1C_1 = DE$$

Теперь видимъ, что тр.-ки  $DBE$  и  $A_1B_1C_1$  имѣютъ по три соответственно равныя стороны; значитъ, они равны. Но одинъ изъ нихъ, именно  $DBE$ , подобенъ  $\triangle ABC$ ; слѣд., и другой, т.-е.  $A_1B_1C_1$  подобенъ  $ABC$ .

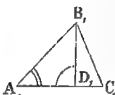
**180. Замѣчаніе.** Полезно обратить вниманіе на то, что приемъ доказательства, употребленный нами въ трехъ случаяхъ предыдущей теоремы, одинъ и тотъ же; а именно: отложивъ на сторонѣ большаго треугольника часть, равную сходственной сторонѣ меньшаго, и проведя прямую, параллельную другой сторонѣ, мы образуемъ вспомогательный тр.-къ, подобный большому данному. Послѣ этого, беря во вниманіе условія разсматриваемаго случая и свойства подобныхъ тр.-ковъ, мы доказываемъ равенство вспомогательнаго тр.-ка меньшему данному и, наконецъ, заключаемъ о подобіи данныхъ тр.-ковъ.

**181. Слѣдствіе.** Въ подобныхъ треугольникахъ сходственные стороны пропорциональны сходственнымъ высо-

тѣмъ, т.-е. тѣмъ, которыя опущены на сходственные стороны.



Черт. 140



Дѣйствительно, если тр.-ки  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны, то прямоугольные тр.-ки  $ABD$  и  $A_1B_1D_1$  также подобны ( $A=A_1$  и  $D=D_1$ ); поэтому

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Подобно этому можно доказать, что въ подобныхъ тр.-кахъ сходственные стороны пропорціональны сходственнымъ медианамъ, сходственнымъ биссектрисамъ, радиусамъ круговъ вписанныхъ и радиусамъ круговъ описанныхъ.

**182. Теорема.** Если стороны одного треугольника соответственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ другого треугольника, то такіе треугольники подобны.

Такъ какъ на чертежѣ затруднительно изобразить всевозможные случаи расположенія указанныхъ въ теоремѣ треугольниковъ, то мы будемъ вести разсужденіе независимо отъ чертежа.

Пусть стороны угловъ  $A, B$  и  $C$  одного треугольника соответственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ угловъ  $A_1, B_1, C_1$  другого треугольника. Тогда углы  $A$  и  $A_1$  или равны другъ другу, или составляютъ въ суммѣ два прямыхъ (81 и 82); то же самое можно сказать объ углахъ  $B$  и  $B_1, C$  и  $C_1$ . Чтобы доказать подобіе данныхъ тр.-ковъ, достаточно убѣдиться, что какіе-нибудь два угла одного изъ нихъ равны соответственно двумъ угламъ другого. Предположимъ, что этого нѣтъ. Тогда могутъ представиться два случая:

1°, У треугольниковъ нѣтъ вовсе попарно равныхъ угловъ. Тогда:

$$A + A_1 = 2d; \quad B + B_1 = 2d; \quad C + C_1 = 2d$$

и, слѣд., сумма угловъ обоихъ треугольниковъ равна  $6d$ . Такъ какъ это невозможно, то этотъ случай исключается.



2°, У треугольников только одна пара равных угловъ; напр., пусть  $A=A_1$ . Тогда

$$B+B_1=2d; C+C_1=2d$$

и, слѣд., сумма угловъ обоихъ тр.-ковъ больше  $4d$ . Такъ какъ это невозможно, то и этотъ случай исключается.

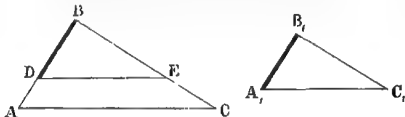
Остается одно возможное допущеніе, что тр.-ки имѣютъ двѣ пары равныхъ угловъ; но тогда они подобны.

**183. Теорема.** Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катетъ одного пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  два тр.-ка (черт. 141), у которыхъ углы  $B$  и  $B_1$  прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр.-ки подобны. — Для доказательства употребимъ тотъ же приемъ, которымъ мы пользовались выше (180). Отложимъ  $BD=A_1B_1$  и проведемъ



Черт. 141

$DE \parallel AC$ . Тогда получимъ вспомогательный  $\triangle DBE$ , подобный  $\triangle ABC$  (178). Докажемъ, что онъ равенъ  $\triangle A_1B_1C_1$ . Изъ подобія тр.-ковъ  $ABC$  и  $DBE$  слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE} \quad [2]$$

Сравнивая эту пропорцію съ данной [1], находимъ, что первыя отношенія ихъ одинаковы; слѣд., равны и вторыя отношенія, т.-е.

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AC}{A_1C_1}; \text{ откуда: } DE=A_1C_1$$

Теперь видимъ, что тр.-ки  $DBE$  и  $A_1B_1C_1$  имѣютъ по равной гипотенузе и равному катету; слѣд., они равны; а такъ

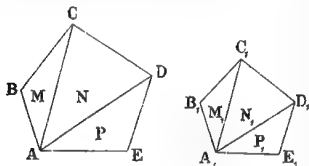
какъ одинъ изъ нихъ подобенъ  $\triangle ABC$ , то и другой ему подобенъ.

**184. Задача.** На данной сторонѣ построить треугольникъ, подобный данному треугольнику.

При концахъ данной стороны строимъ углы, соотвѣтственно равные угламъ даннаго тр.-ка и одинаково съ ними расположенные. Полученный тр.-къ будетъ подобенъ данному (179, 1°).

**185. Теорема.** Два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ одинаковаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.

Пусть мн.-ки  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  составлены изъ одинаковаго числа попарно



Черт. 142

подобныхъ тр.-ковъ:  $\triangle M$  подобенъ  $\triangle M_1$ ,  $\triangle N$  подобенъ  $\triangle N_1$  и т. д.; пусть кромѣ того эти тр.-ки одинаково расположены; требуется доказать, что такіе многоугольники подобны, т.-е. что у нихъ: 1°, равны попарно углы и 2°, сход-

ственные стороны пропорціональны (177).

1°. Равенство угловъ мн.-ковъ слѣдуетъ изъ равенства угловъ тр.-ковъ; такъ,  $B = B_1$  и  $E = E_1$ , какъ равные углы подобныхъ тр.-ковъ ( $M$  и  $M_1$ ,  $P$  и  $P_1$ ),  $A = A_1$ ,  $C = C_1$ ,  $D = D_1$ , какъ суммы угловъ, соотвѣтственно равныхъ другъ другу.

2°. Изъ подобія тр.-ковъ слѣдуетъ:

$$\overbrace{\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}}^{\text{Изъ подобія } M \text{ и } M_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \overbrace{\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{ED}{E_1D_1} = \frac{AE}{A_1E_1}}^{\text{Изъ подобія } P \text{ и } P_1}$$

Изъ подобія  $N$  и  $N_1$

Возьмемъ изъ этого ряда равныхъ отношеній только тѣ, въ которыхъ входятъ стороны данныхъ многоугольниковъ; тогда получимъ:

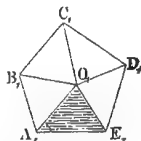
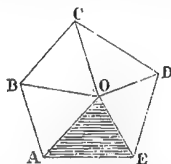
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$$

Такимъ образомъ, данные многоугольники, имѣя соответственно равныя углы и пропорціональныя стороны, подобны.

**186. Обратная теорема.** Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.

Пусть мн.-ки  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  подобны. Ихъ можно разложить на одинаковое число подобныхъ тр.-ковъ различными способами. Укажемъ самый общій способъ. --- Возьмемъ внутри мн.

$ABCDE$  произвольную точку  $O$  и соединимъ ее со всѣми вершинами. Тогда мн.  $ABCDE$  разобьется на столько треугольниковъ, сколько въ немъ сторонъ. Возьмемъ одинъ изъ нихъ, напр.



Черт. 143

$AOE$ , и на сходственной сторонѣ  $A_1E_1$  другого многоугольника построимъ  $\triangle A_1O_1E_1$ , подобный  $\triangle AOE$ . Вершину его  $O_1$  соединимъ съ прочими вершинами мн.  $A_1B_1C_1D_1E_1$ . Тогда и этотъ мног.-къ разобьется на то же число тр.-ковъ. Докажемъ, что тр.-ки первого многоугольника соответственно подобны тр.-камъ второго многоугольника.  $\triangle AOE$  подобенъ  $\triangle A_1O_1E_1$  по построению. Чтобы доказать подобіе сосѣднихъ тр.-ковъ  $ABO$  и  $A_1B_1O_1$ , примемъ во вниманіе, что изъ подобія мн.-ковъ, между прочимъ слѣдуетъ:

$$A = A_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1} \quad [1]$$

а изъ подобія тр.-ковъ  $AOE$  и  $A_1O_1E_1$  выводимъ:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \text{ и } \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1} \quad [2]$$

Изъ равенствъ [1] и [2] слѣдуетъ:

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}$$

Теперь видимъ, что тр.-ки  $ABO$  и  $A_1B_1O_1$  имѣютъ по рав-

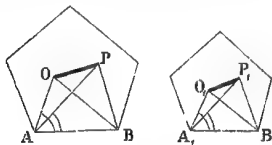
ному углу, заключенному между пропорциональными сторонами; значитъ, они подобны.

Совершенно такъ же докажемъ подобіе слѣдующихъ треугольниковъ  $BCO$  и  $B_1C_1O_1$ , затѣмъ  $COD$  и  $C_1O_1D_1$  и т. д.

**187. Сходственные точки и линіи.** Если на плоскостяхъ подобныхъ многоугольниковъ возьмемъ такіа точки  $O$  и  $O_1$  (черт. 143), что тр.-ки  $OAB$  и  $O_1A_1B_1$ , полученные отъ соединенія этихъ точекъ съ концами какихъ-нибудь двухъ сходственныхъ сторонъ, подобны, то такіа точки наз. *сходственными*. Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что если точки  $O$  и  $O_1$  сходственные, то *вся треугольники*, получаемые соединеніемъ этихъ точекъ съ концами какихъ угодно сходственныхъ сторонъ, будутъ соответственно подобны.

Сходственные точки могутъ быть взяты и на сторонахъ многоугольниковъ, и въ ихъ сходственныхъ вершинахъ, и даже внѣ многоугольниковъ.

Если точки  $O$  и  $O_1$ ,  $P$  и  $P_1$  (черт. 144) попарно сходственные, то прямая  $OP$  и  $O_1P_1$  наз. *сходственными линіями*. Эти линіи обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ.



Черт. 144

**188. Теорема.** *Сходственные линіи двухъ подобныхъ многоугольниковъ пропорциональны изъ сходственныхъ сторонамъ.*

Соединимъ сходственные точки съ концами двухъ какихъ-нибудь сходств. сторонъ, напр.  $AB$  и  $A_1B_1$ . Изъ подобія треугольниковъ  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$  слѣдуетъ:

$$\angle OAB = \angle O_1A_1B_1 \quad \text{и} \quad \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \quad [1]$$

а изъ подобія тр.-ковъ  $PAB$  и  $P_1A_1B_1$  выводимъ:

$$\angle PAB = \angle P_1A_1B_1 \quad \text{и} \quad \frac{PA}{P_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \quad [2]$$

Изъ сравненія равенствъ [1] и [2] находимъ:

$$\angle OAP = \angle O_1A_1P_1 \quad \text{и} \quad \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{PA}{P_1A_1}$$

Теперь видимъ, что тр.-ки  $OAP$  и  $O_1A_1P_1$  имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами; слѣд. они подобны и потому

$$\frac{OP}{O_1P_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

**189. Теорема.** *Периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны.*

Пусть мн.-ки  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  (черт. 143) подобны; тогда, по определению:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$$

Изъ алгебры известно, что если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему; поэтому:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \dots$$

**Примѣръ.** Если сторона одного многоугольника болѣе сходственной стороны другого многоугольника, подобнаго ему, въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д., то и периметръ перваго многоугольника болѣе периметра втораго въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д.

**190. Задача.** *На данной сторонѣ  $A_1E_1$ , (черт. 142) построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику  $ABCDE$ .*

Разбивъ данный многоугольникъ на тр.-ки ( $M, N, P$ ), строить на данной сторонѣ  $A_1E_1$  тр.-къ  $P_1$ , подобный тр.-ку  $P$ , затѣмъ на сторонѣ  $A_1D_1$  тр.-къ  $N_1$ , подобный тр.-ку  $N$ , и т. д. Полученный такимъ образомъ мног.-къ  $A_1B_1C_1D_1E_1$  будетъ подобенъ данному (185).

## ГЛАВА II.

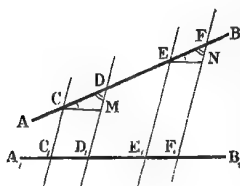
### Нѣкоторыя теоремы о пропорціональныхъ линіяхъ.

**191. Теорема.** *Двѣ прямыя, пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, разсѣкаются ими на пропорціональныя части.*

Пусть  $AB$  и  $A_1B_1$  (черт. 145) будутъ двѣ какія-нибудь прямыя, разсѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ  $CC_1, DD_1, EE_1$ ,

$FF_1$  и т. д.; требуется доказать, что отношеніе двухъ какихъ-нибудь отрезковъ прямой  $AB$  равно отношенію соответствующихъ отрезковъ прямой  $A_1B_1$ . Докажемъ, напр., что:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{C_1D_1}{E_1F_1}$$



Черт. 145

Проведи  $CM$  и  $EN$  параллельно  $A_1B_1$ , будемъ имѣть:  $C_1D_1 = CM$  и  $E_1F_1 = EN$  (91). Тр.-ки  $CDM$  и  $EFN$  подобны, потому что углы одного равны соответственно угламъ другого (вслѣдствіе параллельности линій). Изъ ихъ подобія слѣдуетъ:

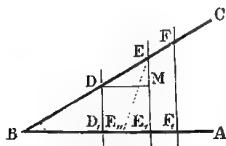
$$\frac{CD}{EF} = \frac{CM}{EN}; \text{ откуда: } \frac{CD}{EF} = \frac{C_1D_1}{E_1F_1}$$

Подобнымъ образомъ легко доказать пропорціональность всякихъ другихъ соответствующихъ отрезковъ.

**192. Теорема.** Стороны угла, пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, разсѣкаются ими на пропорціональныя части.

Пусть стороны угла  $ABC$  пересѣкаются рядомъ параллельныхъ прямыхъ  $DD_1$ ,  $EE_1$ ,  $FF_1$  и т. д.; требуется доказать, что отношеніе двухъ какихъ-нибудь отрезковъ стороны  $BC$  равно отношенію соответствующихъ отрезковъ стороны  $BA$ . Докажемъ, напр., что:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_1}$$



Черт. 146

Проведи  $DM \parallel BA$ , будемъ имѣть:  $D_1E_1 = DM$ . Изъ подобія тр.-ковъ  $BDD_1$  и  $DEM$  находимъ:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{DM}; \text{ откуда: } \frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_1}$$

Подобнымъ образомъ легко доказать пропорціональность всякихъ другихъ соответствующихъ отрезковъ.

**193. Обратная теорема.** Если на сторонахъ угла отло-

илимъ отъ вершины пропорціональныя части, то прямая, соединяющая соответственные концы ихъ, параллельна.

Пусть на сторонахъ угла  $ABC$  (черт. 146) отложены отъ вершины части  $BD$ ,  $DE$ ,  $BD_1$  и  $D_1E_1$ , удовлетворяющія пропорціи:

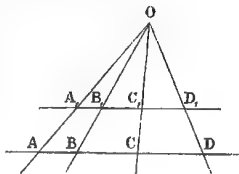
$$BD : DE = BD_1 : D_1E_1$$

Требуется доказать, что прямая  $DD_1$  и  $EE_1$  параллельны.—Предположимъ, что прямая, параллельная  $DD_1$  и проходящая черезъ точку  $E$ , будетъ не  $EE_1$ , а какая-нибудь иная, напр.  $EE_{11}$ . Тогда, согласно прямой теоремѣ, будемъ имѣть:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_{11}} \text{ и по условію: } \frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_1}$$

Откуда:  $D_1E_{11} = D_1E_1$ , что невозможно.

**194. Теорема.** Прямая ( $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ... черт. 147), исходящая изъ одной точки ( $O$ ), и пересѣкаемая рядомъ параллельныхъ прямыхъ ( $AD$ ,  $A_1D_1$ ...), разсѣкается ими на пропорціональныя части и сами дѣлятся эти параллельныя на пропорціональныя части.



Черт. 147

1°. Примѣняя теорему § 192 сначала къ углу  $AOB$ , затѣмъ къ углу  $BOC$  и т. д., получимъ:

$$\begin{array}{c} \text{для угла } AOB \qquad \qquad \text{для угла } COD \\ \frac{OA_1}{A_1A} = \frac{OB_1}{B_1B} = \frac{OC_1}{C_1C} = \frac{OD_1}{D_1D} = \dots \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{для угла } BOC} \end{array}$$

2°. Изъ подобія тр.-ковъ  $AOB$  и  $A_1OB_1$ , затѣмъ  $BOC$  и  $B_1OC_1$ , выводимъ:

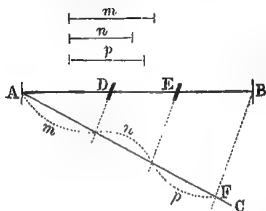
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O} \text{ и } \frac{BO}{B_1O} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Откуда:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Подобнымъ же образомъ доказывается пропорція  $BC : B_1 C_1 = CD : C_1 D_1$ .

**195. Задача.** Раздѣлить конечную прямую  $AB$  на части пропорціонально конечнымъ прямымъ  $m : n : p$ .

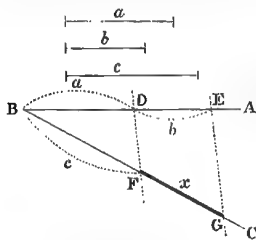


Черт. 148

Проведи неопредѣленную прямую  $AC$  подъ произвольнымъ угломъ къ  $AB$ , отложимъ на ней части, равныя  $m$ ,  $n$  и  $p$ . Точку  $F$ , составляющую конецъ  $p$ , соединяемъ съ  $B$  и черезъ точки отложенія проводимъ прямыя, параллельныя  $BF$ . Тогда  $AB$  раздѣлится въ точкахъ  $D$  и  $E$  на части, пропорціональныя  $m : n : p$  (192).

Если  $m$ ,  $n$  и  $p$  означаютъ какия-нибудь числа, напр. 2, 5, 3, то построеніе выполняется такъ же, съ тою разницею, что на  $AC$  откладываются части, равныя 2, 5 и 3 произвольнымъ единицамъ длины.

**196. Задача.** Къ тремъ конечнымъ прямымъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  найти четвертую пропорціональную,



Черт. 149

т.-е. найти такую прямую  $x$ , которая удовлетворяла бы пропорціи  $a : b = c : x$ .—На сторонахъ произвольнаго угла  $ABC$  откладываемъ части:  $BD = a$ ,  $DE = b$ ,  $BF = c$ . Соединивъ затѣмъ  $D$  и  $F$ , проводимъ  $EG \parallel DF$ . Отрѣзокъ  $FG$  будетъ искомымъ (192).

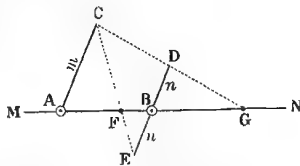
**197. Задача.** На неопредѣленной прямой  $MN$  найти точки, которыя разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ  $A$  и  $B$  этой прямой относились бы, какъ  $m : n$ .—Черезъ  $A$  и  $B$  проводимъ двѣ произвольныя параллельныя прямыя и на нихъ откладываемъ:  $AC = m$ ,  $BD = n$  и  $BE = n$ . Проведи затѣмъ  $CD$  и  $CE$ , получимъ



двѣ искомыя точки:  $F$  и  $G$ . Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ  $ACF$  и  $FBE$ , а затѣмъ изъ подобія тр.-ковъ  $ACG$  и  $BDG$  находимъ:

$$FA : FB = AC : BE = m : n$$

$$GA : GB = AC : BD = m : n$$



Черт. 150

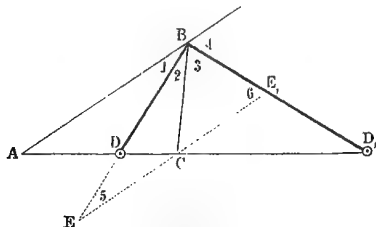
**Замѣчаніе.** Болѣе двухъ точекъ, удовлетворяющихъ требованію задачи, не можетъ быть, потому что при измѣненіи положенія точки  $F$  между  $A$  и  $B$  отношеніе  $FA : FB$  измѣняется; то же самое можно сказать объ отношеніи  $GA : GB$ .

Когда  $m = n$ , существуетъ только одна точка (лежащая на биссектрисѣ между  $A$  и  $B$ ), которая удовлетворяетъ требованію задачи.

**198. Теорема.** Биссектрисса внутренняго или внѣшняго угла треугольника пересѣкаетъ противоположную сторону или ея продолженіе въ такой точкѣ, которой разстояніи отъ концовъ этой стороны пропорціональны двумъ другимъ сторонамъ треугольника.

Пусть  $BD$  есть биссектрисса внутренняго, а  $BD_1$  — биссектрисса внѣшняго угла тр.-ка  $ABC$ . Требуется доказать, что

$$1^\circ. \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \quad 2^\circ. \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{BA}{BC}$$



Черт. 151

Черезъ вершину  $C$  проведемъ  $EE_1 \parallel AB$  до пересѣченія

съ обѣими биссектриссами. Тр.-ки  $ABD$  и  $DEC$  подобны (углы при  $D$  равны, какъ вертикальные, уг. 1 = уг. 5, какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ); точно также подобны тр.-ки  $ABD_1$  и  $CE_1D_1$ . Изъ подобія ихъ находимъ:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{EC} \quad [1] \quad \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{AB}{CE_1} \quad [2]$$

Чтобы перейти отъ этихъ пропорцій къ тѣмъ, которыя требуется доказать, достаточно убѣдиться, что  $EC = BC$  и  $CE_1 = BC$ . И дѣйствительно, такъ какъ уг. 2 = уг. 1 (по условію) и уг. 5 = уг. 1 (какъ накр. леж.), то уг. 2 = уг. 5, и потому  $\triangle EBC$  равнобедренный, т.-е.  $EC = BC$ ; съ другой стороны уг. 3 = уг. 4 (по условію) и уг. 6 = уг. 4 (какъ накр. леж.); значитъ, уг. 3 = уг. 6, и потому  $\triangle BCE_1$  равнобедренный, т.-е.  $CE_1 = BC$ . Заменявъ теперь въ пропорціяхъ [1] и [2] отрезки  $EC$  и  $CE_1$  на  $BC$ , получимъ тѣ пропорціи, которыя требовалось доказать.

**Численный примѣръ.** Пусть  $AB = 10$ ,  $BC = 7$  и  $AC = 6$ . Тогда биссектриссы  $BD$  и  $BD_1$  опредѣлятъ точки  $D$  и  $D_1$ , которыхъ разстоянія отъ  $A$  и  $C$  можно найти изъ пропорцій:

$$\begin{aligned} & \frac{DA}{DC} = \frac{10}{7} \quad \text{и} \quad \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{10}{7} \\ \text{откуда:} & \quad \frac{DA + DC}{DA} = \frac{17}{10} \quad \text{и} \quad \frac{D_1A + D_1C}{D_1A} = \frac{3}{10} \\ \text{т.-е.} & \quad \frac{6}{DA} = \frac{17}{10} \quad \text{и} \quad \frac{6}{D_1A} = \frac{3}{10} \\ \text{значитъ:} & \quad DA = \frac{60}{17} = 3 \frac{9}{17} \quad \text{и} \quad D_1A = \frac{60}{3} = 20 \end{aligned}$$

**199. Обратная теорема.** Если прямая, исходящая изъ вершины треугольника, пересѣкаетъ противоположную сторону или ея продолженіе въ такой точкѣ, которой разстоянія до концовъ этой стороны пропорціональны двумъ другимъ сторонамъ, то она есть биссектрисса внутренняго или внѣшняго угла треугольника.

Пусть  $D$  и  $D_1$  (черт. 151) будутъ двѣ точки, удовлетворяющія пропорціямъ:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \quad [1] \quad \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{BA}{BC} \quad [2]$$

Требуется доказать, что прямая  $BD$  и  $BD_1$  делят пополам: первая внутренний, а вторая внешний угол тр.-ка  $ABC$ . — Проведем снова прямую  $EE_1 \parallel AB$ , найдем из подобия треугольников:

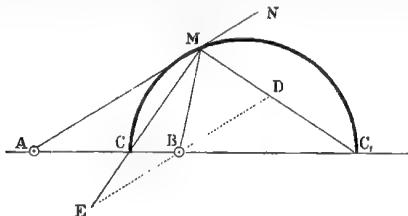
$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{EC} \quad [3] \quad \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{BA}{CE_1} \quad [4]$$

Сравнивая пропорции [3] с [1] и [4] с [2], находим:

$$EC = BC \text{ и } CE_1 = BC$$

Поэтому в тр.-ке  $BEC$  равны углы 2 и 5, а в треугольнике  $BE_1C$  равны углы 3 и 6; но уг. 5 = уг. 1 (как накр. леж.) и уг. 6 = уг. 4 (по той же причине); слѣд. уг. 2 = уг. 1 и уг. 3 = уг. 4, т.-е.  $BD$  и  $BD_1$  суть биссектриссы.

**200. Теорема.** Геометрическое место точек, которых разстояния от двух данных точек  $A$  и  $B$  находится в постоянном отношении  $m:n$ , есть окружность, когда  $m$  не равно  $n$ .



Черт. 152

Если  $m$  не равно  $n$ , то на неопределенной прямой, проходящей через  $A$  и  $B$ , можно найти две точки, принадлежащая искомому геометр. месту (197). Пусть это будут точки  $C$  и  $C_1$ , т.-е.

$$CA:CB = m:n \text{ и } C_1A:C_1B = m:n$$

Предположим теперь, что существует еще какая-нибудь точка  $M$ , удовлетворяющая пропорции:

$$MA:MB = m:n$$

Проведем  $MC$  и  $MC_1$ , мы должны заключить (199), что первая из этих прямых есть биссектрисса угла  $AMB$ , а вторая — биссектрисса угла  $BMN$ ; вследствие этого угол  $CMC_1$ , составленный из двух половин смежных углов, должен быть прямой, а потому вершина его  $M$  лежит на окружности, описанной на  $CC_1$ , как на диаметре. Таким образом

мы доказали, что всякая точка  $M$ , принадлежащая данному геометр. мѣсту, лежитъ на окружности  $CC_1$ . Теперь докажемъ обратное предположеніе, т.-е., что всякая точка этой окружности принадлежитъ геометр. мѣсту.

Пусть  $M$  есть произвольная точка этой окружности. Требуется доказать, что  $MA : MB = m : n$ . Проведи черезъ  $B$  прямую  $DE \parallel AM$ , будемъ имѣть слѣдующія пропорціи:

$$MA : BD = C_1A : C_1B = m : n \quad [1]$$

$$MA : BE = CA : CB = m : n \quad [2]$$

Откуда

$$BD = BE$$

т.-е. точка  $B$  есть середина прямой  $DE$ . Такъ какъ уголъ  $CMC_1$  вписанный и опирается на діаметръ, то онъ прямой; поэтому  $\triangle DME$  прямоугольный. Вслѣдствіе этого, если середину  $B$  гипотенузы  $DE$  примемъ за центръ и опишемъ окружность, то она пройдетъ черезъ  $M$ ; значитъ,  $BD = MB$ . Подставивъ теперь въ пропорцію [1] на мѣсто  $BD$  равную ей прямую  $MB$ , будемъ имѣть

$$MA : MB = m : n$$

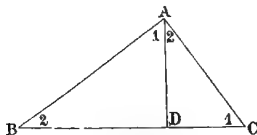
### Г Л А В А III.

#### Числовыя зависимости между элементами треугольника и некоторыхъ другихъ фигуръ.

**201. Теорема.** *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащими отрезкомъ.*

Пусть  $AD$  есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла  $A$  на гипотенузу  $BC$ . Требуется доказать слѣдующія три пропорціи:

$$1^\circ. \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}; \quad 2^\circ. \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}; \quad 3^\circ. \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$



Черт. 153

Первую пропорцію мы докажемъ изъ подобія тр.-ковъ  $ABD$  и  $ADC$ , у которыхъ  $AD$  общая сторона. Эти тр.-ки подобны, потому что острые углы, обозначенные на чертежѣ одними и тѣми же цифрами, равны вслѣдствіе перпендикулярности ихъ сторонъ (82). Возьмемъ въ  $\triangle ABD$  тѣ стороны  $BD$  и

$AD$ , которыя составляютъ первое отношеніе доказываемой пропорціи; сходственными сторонами (177) въ  $\triangle ADC$  будутъ  $AD$  и  $DC$ ; поэтому

$$BD : AD = AD : DC$$

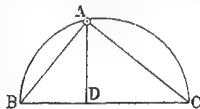
Вторую пропорцію докажемъ изъ подобія тр.-ковъ  $ABC$  и  $ABD$ , у которыхъ  $AB$  общая сторона. Эти тр.-ки подобны, потому что они прямоугольные и острый уголъ  $B$  у нихъ общій. Въ  $\triangle ABC$  возьмемъ тѣ стороны  $BC$  и  $AB$ , которыя составляютъ первое отношеніе доказываемой пропорціи; сходственными сторонами въ  $\triangle ABD$  будутъ  $AB$  и  $BD$ ; поэтому

$$BC : AB = AB : BD$$

Третью пропорцію докажемъ изъ подобія тр.-ковъ  $ABC$  и  $ADC$ , у которыхъ  $AC$  общая сторона. Эти тр.-ки подобны, потому что они оба прямоугольные и имѣютъ общій острый уголъ  $C$ . Въ  $\triangle ABC$  возьмемъ стороны  $BC$  и  $AC$ ; сходственными сторонами въ  $\triangle ADC$  будутъ  $AC$  и  $DC$ ; поэтому

$$BC : AC = AC : DC$$

**202. Слѣдствіе.** Пусть  $A$  есть произвольная точка окружности, описанной на діаметрѣ  $BC$ . Соединивъ концы діаметра съ этою точкою, мы получимъ прямоугольный тр.-къ  $ABC$ , у котораго гипотенуза  $BC$  есть діаметръ, а катеты суть хорды. Примѣняя доказанную выше теорему къ этому треугольнику, приходимъ къ слѣдующему заключенію:



Черт. 154

Перпендикуляръ, опущенный изъ какой либо точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціанальная между отрезками діаметра, а хорда есть средняя пропорціанальная между діаметромъ и прилежащимъ отрезкомъ его.

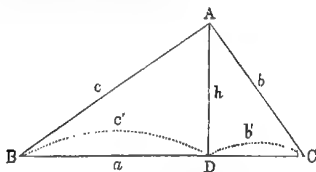
**203. Задача.** Построить среднюю пропорціанальную между двумя конечными прямыми  $a$  и  $b$ .

Предыдущее слѣдствіе позволяетъ рѣшить эту задачу двойнымъ путемъ.

1°. На произвольной прямой откладываемъ части  $BD=a$  и  $DC=b$  (черт. 154); на  $BC$ , какъ на діаметръ, описываемъ полуокружность; изъ  $D$  восстанавливаемъ до пересѣченія съ окружностью перпендикуляръ  $DA$ . Этотъ перпендикуляръ и будетъ искомою среднею пропорціональною между  $BD$  и  $DC$ .

2°. На произвольной прямой откладываемъ части (черт. 154)  $BD=a$  и  $BC=b$ . На бѣльшей изъ этихъ частей описываемъ полуокружность. Проведя перпендикуляръ  $DA$ , соединяемъ  $A$  съ  $B$ . Хорда  $AB$  будетъ среднею пропорціональною между  $BC$  и  $BD$ .

**204. Теорема.** Если стороны прямоугольнаго треугольника измѣрены одною единицею, то квадратъ числа, выражающаго гипотенузу, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ катеты.



Черт. 155

Пусть  $ABC$  есть прямоугольный треугольникъ и  $AD$  перпендикуляръ, опущенный на гипотенузу изъ вершины прямого угла. Тогда, по доказанному выше, можемъ написать:

$$BC:AB=AB:BD \quad \text{и} \quad BC:AC=AC:DC$$

Когда стороны даннаго треугольника и отрѣзки гипотенузы выражены числами, то мы можемъ примѣнить къ этимъ пропорціямъ свойства числовыхъ пропорцій; тогда:

$$AB^2=BC \cdot BD \quad \text{и} \quad AC^2=BC \cdot DC$$

Сложивъ эти два равенства, получимъ:

$$AB^2+AC^2=BC(BD+DC)=BC \cdot BC=BC^2$$

Эту теорему обыкновенно выражаютъ сокращенно, хотя и неправильно, такъ:

*Квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.*

**205. Численные примѣненія.** Пусть  $a, b, c, h, b'$  и  $c'$  (черт. 155) будутъ числа, выражающія въ одной единицѣ стороны, высоту и отрѣзки гипотенузы прямоугольнаго тр.-ка  $ABC$ . На основаніи доказанныхъ выше теоремъ, мы можемъ вывести слѣдующія 5 уравненій, связывающія эти 6 чиселъ:

$$c^2 = ac'; \quad b^2 = ab'; \quad h^2 = b'c'; \quad b' + c' = a; \quad b^2 + c^2 = a^2$$

Изъ этихъ уравненій только первыя четыре самостоятельны, а послѣднее составляетъ слѣдствіе двухъ первыхъ; вслѣдствіе этого уравненія позволяютъ по даннымъ двумъ изъ шести чиселъ находить остальные четыре.

Для примѣра положимъ, что намъ даны отрѣзки гипотенузы:  $b' = 5$  метровъ и  $c' = 7$  метр.; тогда

$$a = b' + c' = 12; \quad c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9,165...$$

$$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7,744...$$

$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5,916...$$

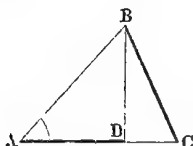
**206. Слѣдствіе.** *Квадраты катетовъ относятся между собою, какъ отрѣзки гипотенузы.* Дѣйствительно, изъ уравненій предыдущаго параграфа находимъ:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'$$

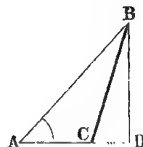
**207. Замѣчаніе.** Въ послѣдующихъ теоремахъ мы будемъ сокращенно говорить: „квадратъ стороны“ вмѣсто: *квадратъ числа, выражающаго сторону*, или: „произведеніе прямыхъ“ вмѣсто: *произведеніе чиселъ, выражающихъ прямые*. При этомъ будемъ подразумѣвать, что прямые измѣрены одною и тою же единицею.

**208. Теорема.** *Въ треугольникѣ квадратъ стороны, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія одной изъ*

этих сторонъ на отрезокъ съ этой вершины остроуго угла до высоты.



Черт. 156



Черт. 157

Пусть  $BC$  будетъ сторона тр.-ка  $ABC$  (черт. 156 или 157), лежащая противъ острого угла  $A$ , и  $BD$  высота, опущенная на какую либо изъ остальныхъ сторонъ, напр. на  $AC$ . Требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AC \cdot AD$$

Изъ прямоугольныхъ тр.-ковъ  $BDC$  и  $ABD$  выводимъ:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \quad [1] \quad BD^2 = AB^2 - AD^2 \quad [2]$$

Съ другой стороны:  $DC = AC - AD$  (черт. 156) или  $DC = AD - AC$  (черт. 157). Въ обоихъ случаяхъ для  $DC^2$  получимъ одно и то же выраженіе:

$$\begin{aligned} DC^2 &= (AC - AD)^2 = AC^2 - 2 AC \cdot AD + AD^2 \quad \{ \\ DC^2 &= (AD - AC)^2 = AD^2 - 2 AD \cdot AC + AC^2 \quad \} [3] \end{aligned}$$

Подставивъ въ равенство [1] на мѣсто  $BD^2$  и  $DC^2$  ихъ выраженія изъ равенствъ [2] и [3], получимъ:

$$BC^2 = AB^2 - \underline{AD^2} + AC^2 - 2 AC \cdot AD + \underline{AD^2}$$

Это равенство, послѣ сокращенія членовъ  $-AD^2$  и  $+AD^2$ , и есть то самое, которое требовалось доказать.

**Замѣчаніе.** Доказанная теорема остается вѣрною и тогда, когда уголъ  $C$  прямой; тогда отрезокъ  $CD$  обратится въ 0, т.-е.  $AC$  сдѣлается равною  $AD$ , и мы будемъ имѣть:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AC^2 = AB^2 - AC^2$$

что согласуется съ теоремою о квадратѣ гипотенузы (204).

**205. Теорема.** Въ треугольнике квадратъ стороны, ле-



жащей против тупого угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, сложенной съ удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ на отръзокъ ея продолженія отъ вершины тупого угла до высоты.

Пусть  $AB$  будетъ сторона тр.-ка  $ABC$  (черт. 158), лежащая противъ тупого угла  $C$ , и  $BD$  — высота, опущенная на какую либо изъ остальныхъ сторонъ; требуется доказать, что

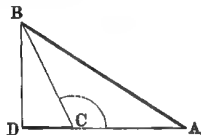
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 AC \cdot CD$$

Изъ прямоугольныхъ тр.-ковъ  $ABD$  и  $CBD$  имѣемъ:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad [1]$$

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 \quad [2]$$

$$\begin{aligned} \text{Но } AD^2 &= (AC + CD)^2 = \\ &= AC^2 + 2 AC \cdot CD + CD^2 \quad [3] \end{aligned}$$



Черт. 158

Замѣнивъ въ равенствѣ [1]  $BD^2$  и  $AD^2$  ихъ выраженіями изъ равенствъ [2] и [3] найдемъ:

$$AB^2 = BC^2 - \underline{CD^2} + AC^2 + 2 AC \cdot CD + \underline{CD^2}$$

что, послѣ сокращенія, даетъ доказываемое равенство.

**§10. Слѣдствіе.** Изъ трехъ послѣднихъ теоремъ выводимъ, что квадратъ стороны треугольника равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ, смотря по тому, будетъ ли противуположащій уголъ прямой, острый или тупой. Отсюда слѣдуетъ обратное предположеніе:

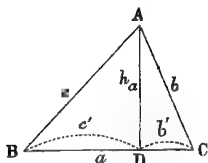
Уголъ треугольника окажется прямымъ, острымъ или тупымъ, смотря по тому, будетъ ли квадратъ противоположащей стороны равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ.

**Примѣры.** 1°. Стороны тр.-ка  $ABC$  (черт. 159) суть:  $a = 5$ ,  $c = 3$ . Такъ какъ  $5^2 = 4^2 + 3^2$ , то уголъ  $A$  прямой.

2°.  $a = 8$ ,  $b = 7$ ,  $c = 4$ . Такъ какъ  $8^2 < 7^2 + 4^2$ , то уголъ  $A$  острый.

3°.  $a = 8$ ,  $b = 5$ ,  $c = 4$ . Такъ какъ  $8^2 > 5^2 + 4^2$ , то уголъ  $A$  тупой.

### § 11. Вычисленіе высотъ треугольника по его сторонамъ



Черт. 159

Обозначимъ высоту, опущенную на сторону  $a$  тр.-ка  $ABC$ , черезъ  $h_a$ . Чтобы вычислить ее, предварительно изъ уравненія:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

находимъ отръзокъ основанія  $c'$ :

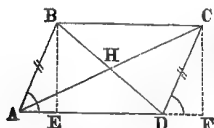
$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Послѣ чего изъ  $\triangle ABD$  опредѣляемъ высоту какъ катетъ:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} \quad *)$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить высоты  $h_b$  и  $h_c$ , опущенныя на стороны  $b$  и  $c$ .

**§ 12. Теорема.** Сумма квадратовъ діагоналей параллелограмма равна суммѣ квадратовъ его сторонъ.



Черт. 160

Изъ вершинъ  $B$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  опустимъ на основаніе  $AD$  перпендикуляры  $BE$  и  $CF$ . Тогда изъ тр.-ковъ  $ABD$  и  $ACD$  находимъ:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DF$$

Прямоугольные тр.-ки  $ABE$  и  $DCF$  равны, такъ какъ они имѣютъ по равной гипотенузѣ и равному острому углу; поэтому  $AE = DF$ . Замѣтивъ это, сложимъ два выведенныя выше равенства; тогда подчеркнутые члены сократятся, и мы получимъ:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AD^2 + CD^2 = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2$$

**§ 13. Вычисленіе медіанъ треугольника по его сторонамъ.** Пусть даны стороны тр.-ка  $ABC$  (черт. 160) и требуется вычислить его медіану  $BH$ . Для этого продолжимъ ее на рав-

\*) Ниже, въ § 278, будетъ дана болѣе простая формула для высоты.

стояніе  $HD=BH$  и точку  $D$  соединимъ съ  $A$  и  $C$ . Тогда получимъ параллелограммъ  $ABCD$  (99,2). Примѣняя къ нему предыдущую теорему, найдемъ:

$$BD^2=2AB^2+2BC^2-AC^2$$

$$\text{слѣд. } BH=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{2AB^2+2BC^2-AC^2}$$

**214. Вычисленіе діагоналей вписаннаго четырехугольника.** Обозначимъ стороны вписаннаго четырехугольника  $ABCD$  черезъ  $a, b, c, d$  и его діагонали черезъ  $x$  и  $y$ . Проведемъ  $AK \perp BC$  и  $CL \perp AD$ . Такъ какъ сумма противоположныхъ угловъ вписан. четырехугольника равна  $2d$ , то если уголъ  $B$  острый, уголъ  $D$  долженъ быть тупымъ; поэтому изъ тр.-ковъ  $ABK$  и  $CDL$  можемъ написать (208, 209):

$$x^2=a^2+b^2-2b \cdot BK \quad [1]$$

$$x^2=c^2+d^2+2d \cdot DL \quad [2]$$

Прямоугольные тр.-ки  $ABK$  и  $CDL$  подобны, такъ какъ они содержатъ по равному острому углу (углы  $B$  и  $CDL$  равны, потому что каждый изъ нихъ служитъ дополненіемъ до  $2d$  къ углу  $ADC$ ). Изъ подобія ихъ выводимъ:

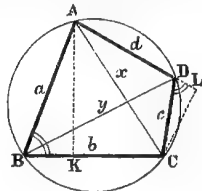
$$BK: a=DL: c$$

$$\text{откуда } BK \cdot c=DL \cdot a \quad [3]$$

Такимъ образомъ мы получили три уравненія съ тремя неизвѣстными  $x, BK$  и  $DL$ . Чтобы исключить  $BK$  и  $DL$ , уравняемъ въ первыхъ двухъ равенствахъ послѣдніе члены, для чего умножимъ равенство [1] на  $cd$ , а равенство [2] на  $ab$ . Сложивъ затѣмъ результаты и принявъ во вниманіе равенство [3], найдемъ:

$$\begin{aligned} (ab+cd)x^2 &= \underline{a^2cd} + \underline{b^2cd} + \underline{c^2ab} + d^2ab \\ &= ac(ad+bc) + bd(bc+ad) \\ &= (ac+bd)(ad+bc) \end{aligned}$$

$$\text{Откуда } x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$



Черт. 161

Замѣтимъ, что въ числитель подкоренной величины первый множитель есть сумма произведений противоположныхъ сторонъ, а второй — сумма произведений сторонъ, сходящихся въ концахъ опредѣляемой діагонали, знаменатель же представляетъ сумму произведений сторонъ, сходящихся въ концахъ другой діагонали; послѣ этого мы можемъ, по аналогіи, написать слѣдующую формулу для діагонали  $y$ :

$$y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

**215. Слѣдствіе 1°.** Произведение діагоналей вписаннаго четырехугольника равно суммѣ произведений противоположныхъ сторонъ.

Дѣйствительно, перемноживъ формулы, выведенныя для  $x$  и для  $y$ , получимъ:

$$xy = \sqrt{(ac+bd)^2} = ac+bd$$

Это предложеніе извѣстно подъ именемъ теоремы Птолемея.

**216. Слѣдствіе 2°.** Отношеніе діагоналей вписаннаго четырехугольника равно отношенію суммы произведений сторонъ, сходящихся въ концахъ первой діагонали, къ суммѣ произведений сторонъ, сходящихся въ концахъ второй діагонали.

Дѣйствительно, раздѣливъ тѣ же два равенства, найдемъ:

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \quad *)$$

Эти два слѣдствія удобны для запоминанія; изъ нихъ можно, обратно, вывести формулы для  $x$  и для  $y$  (перемноженіемъ или дѣленіемъ равенствъ, опредѣляющихъ  $xy$  и  $\frac{x}{y}$ ).

**217. Задача.** По двумъ сторонамъ  $a$  и  $b$  треугольника  $ABC$  и радиусу  $R$  описаннаго круга вычислить третью сторону  $c$  треугольника.

Проведемъ діаметръ  $CD$  и хорды  $AD$  и  $BD$ , получимъ вписанный четырехугольникъ  $ACBD$ , въ которомъ  $DC=2R$ ,  $AD=\sqrt{DC^2-AC^2}=$

\*) Изложенный способъ вычисленія діагоналей вписаннаго четырехугольника сообщенъ намъ г. Попруженко (инспекторомъ Неплюевского Оренбургскаго корпуса).

$$= \sqrt{4R^2 - b^2} \text{ (изъ прямоугольнаго тр.-ка } ACD) \text{ и } BD = \sqrt{DC^2 - BC^2} = \\ = \sqrt{4R^2 - a^2} \text{ (изъ прям. тр.-ка } BCD).$$

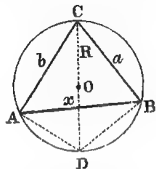
Примѣняя къ этому чстыреугольнику теорему Птоломея, будемъ имѣть:

$$2Rx = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}$$

откуда легко найдемъ  $x$ .

Задача будетъ имѣть другое рѣшеніе, если предположимъ, что стороны  $a$  и  $b$  лежатъ по одну сторону отъ центра. Примѣняя къ этому случаю теорему Птоломея, мы получимъ слѣдующее уравненіе:

$$2Rx = a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}$$



Черт. 162

**218. Теорема.** Если черезъ одну и ту же точку внутри круга проведены нѣсколько хордъ, то произведеніе двухъ отрезковъ каждой хорды есть величина постоянная.

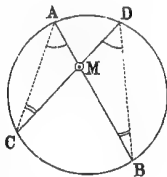
Пусть черезъ точку  $M$  проведены двѣ хорды  $AB$  и  $CD$ ; требуется доказать, что

$$AM \cdot MB = DM \cdot MC$$

Проведемъ вспомогательныя хорды  $AC$  и  $BD$ ; тогда получимъ два тр.-ка  $AMC$  и  $BMD$ , которые подобны, потому что углы  $A$  и  $C$  одного изъ нихъ равны соответственно угламъ  $D$  и  $B$  другого (какъ углы вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу). Изъ подобія ихъ выводимъ:

$$AM:MD = CM:MB$$

$$\text{Откуда: } AM \cdot MB = CM \cdot MD$$



Черт. 163

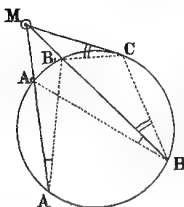
**219. Теорема.** Если черезъ одну и ту же точку внѣ круга проведены нѣсколько секущихъ и касательная, то:

1°, произведеніе каждой секущей на ея вѣнливую часть есть величина постоянная;

2°, эта постоянная величина равна квадрату касательной.

Пусть через точку  $M$  проведены двѣ сѣкущія  $MA$  и  $MB$  и касательная  $MC$ ; требуется доказать, что

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC^2$$



Черт. 164

1° Проведемъ вспомо­гательныя хорды  $AB_1$  и  $BA_1$ ; тогда получимъ тр.-ки:  $MA B_1$  и  $MA_1 B$ , которые подобны, потому что у нихъ уголъ  $M$  общій, а углы  $A$  и  $B$  равны, какъ вписанные, опирающіеся на одну дугу. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

$$MA : MB = MB_1 : MA_1$$

Откуда:  $MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1$

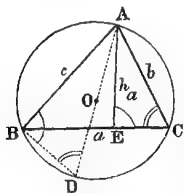
2°. Проведемъ вспомо­гательныя хорды  $B_1 C$  и  $BC$ ; тогда получимъ два тр.-ка  $MBC$  и  $MB_1 C$ , которые подобны, потому что у нихъ уголъ  $M$  общій, и углы  $MCB_1$  и  $CBM$  равны, такъ какъ каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги  $B_1 C$ , (155; 163). Возьмемъ въ  $\triangle MBC$  стороны  $MB$  и  $MC$ ; сходственныхъ сторонами въ  $\triangle MB_1 C$  будутъ  $MC$  и  $MB_1$ ; поэтому:

$$MB : MC = MC : MB_1$$

Откуда:  $MB \cdot MB_1 = MC^2$

Значить:  $MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC^2$ .

**220. Теорема.** Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно:



Черт. 165

дугу. Изъ подобія выводимъ:

$$c \cdot h_a = 2R \cdot b$$

Откуда:  $bc = 2R \cdot h_a$

(1)

2° Обозначим биссектрису угла  $A$  через  $\alpha$  (черт. 166). Продолжимъ ее до пересѣченія съ описанною окружностью въ точкѣ  $E$  (эта точка лежитъ въ срединѣ дуги  $BC$ , такъ какъ углы  $BAE$  и  $EAC$ , по условію, равны). Тр.-ки  $ABE$  и  $ADC$  подобны, потому что углы при точкѣ  $A$  равны по условію, и  $C=E$ , какъ углы вписанные, опирающіеся на одну дугу. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

$$c:\alpha=AE:b; \text{ откуда } bc=\alpha \cdot AE$$

$$\text{или } bc=\alpha(\alpha+DE)=\alpha^2+\alpha \cdot DE$$

$$\text{Но } \alpha \cdot DE=BD \cdot DC \quad (218)$$

$$\text{Поэтому } bc=\alpha^2+BD \cdot DC \quad [2]$$

**221. Вычисленіе радіуса описаннаго круга и биссектрисъ угловъ.** Изъ равенства [1] предыдущаго параграфа находимъ:

$$R=\frac{bc}{2h_a}$$

Если вставимъ на мѣсто  $h_a$  выраженіе, найденное для высоты раньше (211), то получимъ формулу, опредѣляющую  $R$  въ зависимости отъ  $\alpha$ ,  $b$  и  $c$ .

Изъ равенства [2] того же параграфа выводимъ:

$$\alpha^2=bc-BD \cdot DC$$

Отрѣзки  $BD$  и  $DC$  можно найти изъ пропорцій  $BD:DC=c:b$  (198); откуда:

$$\frac{BD+DC}{BD}=\frac{b+c}{c} \quad \text{и} \quad \frac{BD+DC}{DC}=\frac{b+c}{b}$$

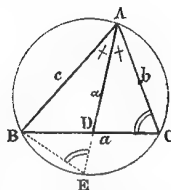
Замѣтивъ, что  $BD+DC=a$ , получимъ:

$$BD=\frac{ac}{b+c} \quad DC=\frac{ab}{b+c}$$

$$\text{Слѣд. } \alpha^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2-a^2]=\frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c+a)(b+c-a)]$$

Это выраженіе можно упростить, если обозначимъ периметръ тр.-ка, т. е.  $a+b+c$ , черезъ  $2p$ ; тогда  $b+c-a=2p-2a=2(p-a)$  и

$$\alpha=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$



Черт. 166

## ГЛАВА IV.

### Понятіе о приложеніи алгебры къ геометріи.

**222. Задача.** Данную конечную прямую раздѣлить въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Эту задачу надо понимать такъ: раздѣлить данную пря-

мую на такім двѣ части, чтобы большая изъ нихъ была среднею пропорціональною между всею линіею и меньшею ея частью.

Задача, очевидно, будетъ рѣшена, если мы найдемъ одну изъ двухъ частей, на которыя требуется раздѣлить данную прямую. Будемъ находить большую часть, т.-е. ту, которая должна быть *среднею пропорціональною* между всею линіею и меньшею ея частью. Предположимъ сначала, что рѣчь идетъ не о построеніи этой части, а только объ ея *вычисленіи*. Тогда задача рѣшается *алгебраически* такъ: если длина данной прямой обозначимъ  $a$ , а большей ея части  $x$ , то длина другой части выразится  $a - x$ , и согласно требованію задачи мы будемъ имѣть пропорцію:

$$a : x = x : a - x$$

откуда:

$$x^2 = a(a - x)$$

или

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, находимъ:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \quad x_{11} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

Отбросивъ второе рѣшеніе, какъ отрицательное\*), возьмемъ только первое, положительное, рѣшеніе, которое удобнѣе представить такъ:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} \quad [1]$$

Чтобы убѣдиться, годится ли это рѣшеніе для предложенной задачи, необходимо показать, что величина  $x_1$  меньше  $a$ . Въ этомъ легко убѣдиться, преобразуя радикалъ такъ:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Такъ какъ  $\sqrt{5} < 3$ , то  $\frac{a}{2}\sqrt{5} < \frac{3}{2}a$ , и потому разность  $\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$  меньше разности  $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a$ , т. е. меньше  $a$ . Та-

\*) Не трудно было бы показать, что отрицательное рѣшеніе, будучи вѣрно со знакомъ +, даетъ отвѣтъ на извѣстную задачу: данную прямую  $a$  продолжить на столько (на  $x$ ), чтобы продолженіе было средней пропорціональною между  $a$  и  $a + x$ .

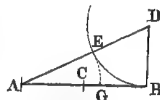


кимъ образомъ, мы прежде всего видимъ, что задача *всегда* возможна и имѣетъ только *одно* рѣшеніе. Если бы намъ теперь удалось *построить* такую прямую, которой длина выражается формулой [1], то, нанеся эту длину на данную прямую, мы раздѣлили бы ее въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Итакъ, вопросъ сводится къ *построенію формулы* [1].

Разсматривая отдѣльно выраженіе  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ , мы замѣчаемъ, что оно представляетъ собою длину гипотенузы такого прямоугольнаго тр.-ка, у котораго одинъ катетъ равенъ  $a$ , а другой  $\frac{a}{2}$ . Построивъ такой тр.-къ, мы найдемъ прямую, выражаемую формулой  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ . Чтобы получить затѣмъ длину  $x_1$ , достаточно изъ гипотенузы построеннаго треугольника вычесть  $\frac{a}{2}$ .

Такимъ образомъ, построеніе можно выполнить такъ:

Дѣлимъ данную прямую  $AB$  пополамъ въ точкѣ  $C$ . Изъ конца  $B$  возстапавли-  
емъ перпендикуляръ  $BD$  и откладываемъ  
на немъ  $BD=BC$ . Соединивъ  $A$  съ  $D$ ,  
получимъ прим. тр.-къ  $ABD$ , у котораго  
катетъ  $AB=a$ , а другой катетъ  $BD=\frac{a}{2}$ .



Черт. 167

Слѣд., его гипотенуза  $AD$  равна  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ . Чтобы вычесть изъ гипотенузы длину  $\frac{a}{2}$ , опишемъ изъ  $D$ , какъ центра, дугу радиусомъ  $DB=\frac{a}{2}$ . Тогда отрѣзокъ  $AE$  будетъ равенъ  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$  т.-е. будетъ равенъ  $x_1$ . Отложивъ  $AE$  на  $AB$  (отъ  $A$  до  $G$ ), получимъ точку  $G$ , въ которой  $AB$  раздѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

**§ 23. Алгебраическій способъ рѣшенія geometr. задачъ.**  
Мы рѣшили предложенную задачу путемъ *примененія алгебры къ геометріи*. Этотъ весьма плодотворный приемъ состоитъ въ слѣдующемъ: сперва опредѣляютъ, какую линію должно отыскать, чтобы можно было рѣшить задачу. Затѣмъ, обозначивъ данныя линіи буквами  $a, b, c, \dots$ , а искомую буквою  $x$ , составляютъ изъ условій задачи и извѣстныхъ теоремъ уравненіе, связывающее искомую линію съ данными: получен-

ное уравненіе рѣшаютъ по правиламъ алгебры. Найденную формулу *испытуютъ*, т. е. опредѣляютъ, при всякихъ ли заданіяхъ эта формула даетъ возможные рѣшенія, или только при нѣкоторыхъ, и получается ли одно рѣшеніе или нѣсколько. Затѣмъ *строятъ* формулу, т. е. находятъ построениемъ такую линію, которой численная величина выражается этой формулой.

Такимъ образомъ, алгебраическій приемъ рѣшенія геометрическихъ задачъ состоитъ изъ слѣдующихъ 4-хъ частей: 1°, *составленіе уравненія*, 2°, *рѣшеніе его*, 3°, *испытаніе полученной формулы* и 4°, *построеніе ея*.

Иногда задача приводится къ отысканію нѣсколькихъ линій. Тогда, обозначивъ ихъ буквами  $x, y, z, \dots$ , стремятся составить столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ.

**§24. Построеніе простѣйшихъ формулъ.** Укажемъ простѣйшія формулы, которыя можно построить посредствомъ циркуля и линейки; при этомъ будемъ предполагать, что буквы  $a, b, c, \dots$  означаютъ данныя прямыя, а  $x$  искомую. Не останавливаясь на такихъ формулахъ:

$$x = a + b + c, \quad x = a - b, \quad x = 2a, \quad 3a, \dots$$

построеніе которыхъ весьма просто, перейдемъ къ слѣдующимъ:

1. Формулы:  $x = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \dots, x = \frac{2}{3}a, \dots$  строятся посредствомъ дѣленія прямой  $a$  на равныя части (65, 7, 101) и затѣмъ, если нужно, повтореніемъ одной части слагаемымъ 2, 3, ..., раза.

2. Формула  $x = \frac{ab}{c}$  представляетъ собою *четвертую пропорціональную* къ прямымъ  $c, a$  и  $b$ . Дѣйствительно, изъ этого равенства выводимъ:

$$cx = ab; \text{ откуда } c : a = b : x.$$

Слѣд.,  $x$  найдется способомъ, указаннымъ выше (196) для построенія 4-ой пропорціональной.

3. Формула  $x = \frac{a^2}{b}$  выражаетъ четвертую пропорціональную къ прямымъ  $b, a$  и  $a$ , или, какъ говорятъ, *третью про-*

порціанальную къ простымъ  $b$  и  $a$ . Дѣйствительно, изъ даннаго равенства выводимъ:

$$bx = a^2; \text{ откуда } b : a = a : x.$$

Слѣд.,  $x$  найдется тѣмъ же способомъ, какимъ отыскивается 4-я пропорціанальная (прямую  $a$  придется откладывать два раза).

4. Формула  $x = \sqrt{ab}$  выражаетъ среднюю пропорціанальную между  $a$  и  $b$ . Дѣйствительно, изъ нея выводимъ:

$$x^2 = ab; \text{ откуда } a : x = x : b.$$

Слѣд.,  $x$  найдется способомъ, указаннымъ раньше для построения средней пропорціанальной (203).

5. Формула  $x = \sqrt{a^2 + b^2}$  выражаетъ гипотенузу прямоугольнаго тр.-ка, у котораго катеты суть  $a$  и  $b$ .

6. Формула  $x = \sqrt{a^2 - b^2}$  представляетъ катетъ прямоуг. тр.-ка, у котораго гипотенуза есть  $a$ , а другой катетъ  $b$ . Построение всего удобнѣе выполнить такъ какъ указано въ § 158.

Указанныя формулы можно считать основными. При помощи ихъ строятся болѣе сложныя формулы. Напр.:

7.  $x = \frac{abcd}{efg}$ . Разобьемъ дробь на множители такъ:  $x = \frac{ab}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$  и положимъ, что  $\frac{ab}{e} = k$ . Тогда  $k$  найдемъ, какъ 4-ю пропорціанальную къ  $e$ ,  $a$  и  $b$ . Найди  $k$ , будемъ имѣть:  $x = \frac{kc}{f} \cdot \frac{d}{g}$ . Положимъ, что  $\frac{kc}{f} = l$ . Тогда  $l$  найдемъ, какъ 4-ю пропорціанальную къ линіямъ  $f$ ,  $k$  и  $c$ . Найди  $l$ , будемъ имѣть  $x = \frac{ld}{g}$ ; слѣд.,  $x$  есть 4-я пропорціанальная къ  $g$ ,  $l$  и  $d$ .

Подобнымъ образомъ строятся также и формулы вида:

$$x = \frac{abc \dots kl}{a_1 b_1 c_1 \dots k_1} \text{ или } x = \frac{a^m}{b^{m-1}}$$

т. е. такія формулы, въ которыхъ числитель и знаменатель представляютъ произведение линейныхъ множителей (т. е. буквъ, означающихъ линіи), причемъ числитель содержитъ этихъ множителей на одинъ больше, чѣмъ знаменатель.

8.  $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Подведя  $a$  подъ знакъ радикала, получимъ:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3} a^2} = \sqrt{a \cdot \frac{2}{3} a}$$

Отсюда видимъ, что  $x$  есть средняя пропорціанальная между прямыми  $a$  и  $\frac{2}{3}a$ .

9.  $\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$ . Положимъ, что  $a^2+b^2=k^2$ . Тогда  $k$  найдется, какъ гипотенуза прямоуг. тр.-ка, у котораго катеты суть  $a$  и  $b$ . Построивъ  $k$ , положимъ, что  $k^2-c^2=l^2$ . Тогда  $l$  найдется, какъ катетъ такого прям. тр.-ка, у котораго гипотенуза есть  $k$ , а другой катетъ  $c$ . Построивъ  $l$ , будемъ имѣть:  $x=\sqrt{l^2+d^2}$ . Слѣд.,  $x$  есть гипотенуза тр.-ка, у котораго катеты суть  $l$  и  $d$ .

10.  $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$ . Положимъ, что

$$a^4=b^4y, \text{ т.-е. } y=\frac{a^4}{b^4}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$$

Отсюда видно, что  $y$  найдется посредствомъ троекратнаго построенія 4-ой пропорціанальной. Построивъ  $y$ , будемъ имѣть:

$$x=\sqrt[4]{b^4y-b^4}=\sqrt[4]{b^4(y-b)}=\sqrt{b\sqrt{b(y-b)}}$$

Выраженіе  $\sqrt{b(y-b)}$  представляетъ линію, которая есть средняя пропорціанальная между  $b$  и  $y-b$ . Пусть эта линія будетъ  $k$ . Тогда  $x=\sqrt{bk}$ ; значить,  $x$  найдется, какъ средняя пропорціанальная между  $b$  и  $k$ .

Ограничимся этими примѣрами. Замѣтимъ, что подробное разсмотрѣніе способовъ построенія алгебраическихъ формулъ приводитъ къ слѣдующему важному выводу:

*помощью циркуля и линейки возможно строить только такіа алгебраическія выраженія, которыя или вовсе не содержатъ радикаловъ, или же содержатъ радикалы съ показателемъ 2, 4, 8, ..., т. е. съ показателемъ, равнымъ степени 2-хъ.*

## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

### Доказать теоремы:

189. Прямая, проведенная черезъ середины оснований трапеціи, проходитъ черезъ точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ и черезъ точку пересѣченія діагоналей.

190. Если два круга касаются извнѣ, то часть вѣншей общей касательной, ограниченная точками касанія, есть средняя пропорціанальная между діаметрами круговъ.

191. Сумма квадратовъ сторонъ треугольника равна утроенной суммѣ квадратовъ разстояній точки пересѣченія медианъ отъ вершинъ треугольника (§ 212).

192. Если въ прямоугольный тр.-къ  $ABC$  вписать квадратъ  $DEFG$  такъ, чтобы сторона  $DE$  совпадала съ гипотенузой  $BC$ , то эта сторона есть средняя пропорціональная между отрезками гипотенузы  $BD$  и  $EC$ .

193. Если двѣ конечныя прямыя  $AB$  и  $CD$  пересѣкаются (хотя бы и при продолженіи) въ точкѣ  $E$  такъ, что

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED$$

то точки  $A, B, C$  и  $D$  лежатъ на одной окружности (эта теорема обратна изложеннымъ въ §§ 218 и 219).

194. Дана окружность  $O$  и двѣ точки  $A$  и  $B$  внѣ ея. Черезъ эти точки проведены нѣсколько окружностей, пересѣкающихъ окружность  $O$ , или касающихся ея. Доказать, что всѣ хорды, соединяющія точки пересѣченія каждой изъ этихъ окружностей съ окружностью  $O$ , а также и общія касательныя, сходятся (при продолженіи) въ одной точкѣ, лежащей на продолженіи прямой  $AB$ .

195. Основываясь на этомъ, вывести способъ построенія такой окружности, которая проходитъ черезъ 2 данныя точки  $A$  и  $B$  и касается данной окружности  $O$ .

196. Даны два какіе-нибудь круга на плоскости. Если два радіуса этихъ круговъ движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая черезъ концы ихъ, пересѣкаетъ линію центровъ всегда въ одной точкѣ (эта точка наз. *центромъ подобія* двухъ круговъ).

197. Медиана тр.-ка дѣлитъ пополамъ всѣ прямыя, проведенныя внутри тр.-ка параллельно той сторонѣ, относительно которой взята медиана.

198. Даны три прямыя, исходящія изъ одной точки. Если по одной изъ нихъ движется какая-нибудь точка, то разстоянія ея отъ двухъ другихъ прямыхъ сохраняютъ всегда одно и то же отношеніе.

199. Если двѣ окружности коцентрическія, то сумма квадратовъ разстояній всякой точки одной изъ нихъ отъ концовъ какого угодно діаметра другой есть величина постоянная (§ 212).

200. Если изъ трехъ вершинъ тр.-ка и изъ точки пересѣченія его медианъ опустимъ перпендикуляры на какую-нибудь вышнюю прямую, то послѣдніе изъ 4-хъ перпендикуляровъ равны третьей части суммъ первыхъ трехъ.

201. Если соединимъ прямыми основанія трехъ высотъ какого-нибудь тр.-ка, то образовавшіеся при этомъ 3 тр.-ка у вершинъ даннаго подобны ему. Вывести отсюда, что для тр.-ка, измѣющаго сторонами прямыя, соединяющія основанія высотъ даннаго тр.-ка, эти высоты служатъ биссектрисами.

202. Діаметръ  $AB$  данной окружности продолженъ за точку  $B$ . Черезъ какую-нибудь точку этого продолженія проведена неопредѣленная прямая

**CD** **AB**. Если произвольную точку *M* этого перпендикуляра соединимъ съ *A*, то (обозначивъ черезъ *A*<sub>1</sub> вторую точку пересѣченія съ окружностью этой прямой) произведение *AM* · *AA*<sub>1</sub> есть величина постоянная.

### Найти геометрическія мѣста:

203. — срединъ всѣхъ хордъ, проходящихъ черезъ данную точку окружности.

204. — точекъ, дѣлящихъ въ одномъ и томъ же отношеніи *m* : *n* всѣ хорды, проходящія черезъ данную точку окружности.

205. — точекъ, которыхъ разстоянія отъ сторонъ даннаго угла имѣютъ одно и то же отношеніе *m* : *n*.

206. — точекъ, для которыхъ сумма квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная (§ 212).

207. — точекъ, для которыхъ разность квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная.

208. — точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя въ двумъ даннымъ окружностямъ, равны (это geometr. мѣсто есть прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ; она наз. *радикальною осью* двухъ круговъ).

209. — точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи *m* : *n* всѣ прямыя, соединяющія точки окружности съ данною точкою *O* (лежащую внѣ или внутри окружности).

210. Даны двѣ извѣстныя касающіяся окружности. Черезъ точку касанія *A* проводить въ окружностяхъ двѣ перпендикулярныя хорды *AB* и *AC*. Концы ихъ *B* и *C* соединяютъ прямой. Найти geometr. мѣсто точекъ, дѣлящихъ *BC* въ данномъ отношеніи *m* : *n*.

211. Данный уголъ вращается вокругъ своей вершины. На сторонахъ его, отъ вершины, откладываютъ перемѣнныя длины, по которыхъ отношеніе постоянно. Если конецъ одной стороны описываетъ данную по положенію прямую, какую линію опишетъ другой конецъ?

### Задачи на построеніе:

212. Черезъ точку, данную внутри или внѣ угла, провести прямую такъ, чтобы части ея, заключенныя между этою точкою и сторонами угла, имѣли данное отношеніе *m* : *n*.

213. Найти въ треугольникѣ такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенныя изъ нея на стороны, находились въ данномъ отношеніи *m* : *n* : *p* (смъ упражненіе 205).

214. Построить тр.-къ по углу, одной изъ сторонъ, прилежащихъ къ нему и отношенію этой стороны къ третьей сторонѣ (сколько рѣшеній?).

215. То же—по углу при вершинѣ, основанію и отношенію его къ одной изъ боковыхъ сторонъ.

216. То же—по высотѣ, углу при вершинѣ и отношенію отрезковъ основанія.

217. То же—по углу при вершинѣ, основанію и данной на основаніи точкѣ, черезъ которую проходитъ биссектрисса угла при вершинѣ.

218. То же—по двумъ угламъ и суммѣ или разности основанія съ высотой.

219. Построить равнобедренный тр.-къ по углу при вершинѣ и суммѣ основанія съ высотой.

220. Вписать въ данный кругъ тр.-къ, у котораго даны: основаніе и отношеніе двухъ другихъ сторонъ.

221. Вписать въ данный кругъ тр.-къ, у котораго даны: основаніе и медиана относительно одной изъ неизвѣстныхъ сторонъ (см. упражненіе 203).

222. Вписать квадратъ въ данный сегментъ такъ, чтобы одна его сторона лежала на хордѣ, а вершины противолежащихъ угловъ на дугѣ.

223. Вписать квадратъ въ данный тр.-къ такъ, чтобы одна сторона его лежала на основаніи тр.-ка, а вершины противолежащихъ угловъ на боковыхъ сторонахъ тр.-ка.

224. Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ (см. пред. задачу), у котораго стороны относились бы, какъ  $m : n$ .

225. Около данного квадрата описать тр.-къ, подобный данному.

226. Дана окружность и на ней двѣ точки  $A$  и  $B$ . Найти на этой окружности третью точку  $C$ , чтобы разстоянія ея отъ  $A$  и  $B$  находились въ данномъ отношеніи.

227. На данной прямой найти точку, которая одинаково была бы удалена отъ другой данной прямой и данной точки.

228. Построить тр.-къ по двумъ сторонамъ и биссектриссѣ угла между ними (см. черт. 151. Сначала находимъ прямую  $DE$  изъ пропорціи  $AB : EC$  (т.-е.  $BC$ )  $= BD : DE$ ; затѣмъ строимъ  $BCE$ ;...).

229. Построить прямую  $x$ , которая относилась бы къ данной прямой  $m$ , какъ  $a^2 : b^2$  ( $a$  и  $b$  данныя прямы).

230. Найти внѣ данного круга такую точку, чтобы касательная, проведенная изъ нея къ этой окружности, была вдвое меньше съкущей, проведенной изъ этой же точки черезъ центръ (приложеніемъ алг. къ геом.).

231. Черезъ данную внѣ окружности точку провести такую съкущую, которая раздѣлилась бы этою окружностью въ данномъ отношеніи (прил. алг. къ геом.).

232. Построить тр.-къ по тремъ его высотамъ  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ . (Предварительно изъ подобія прямоуг. тр. ковы надо доказать, что высоты *обратно пропорціональны* соответствующимъ сторонамъ. Если стороны, на которыя опускаются высоты  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , обозначимъ соответственно черезъ  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , то

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}$$

откуда

Выраженіе  $\frac{h_1 h_2}{h_3}$  есть четвертая пропорціональная къ  $h_2$ ,  $h_2$  и  $h_1$ . Построить ее, мы будемъ имѣть три прямыя:  $h_2$ ,  $h_1$  и  $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ , которыми искомыми сторонами пропорціональны; значить, тр.-къ, имѣющій эти прямыя сторонами, будетъ подобенъ искомому, и потому вопросъ сведется къ построенію такого тр.-ка, который, будучи подобенъ данному, имѣлъ бы данную высоту. Задача будетъ невозможна, если по тремъ прямымъ:  $h_1$ ,  $h_2$  и  $\frac{h_1 h_2}{h_3}$  нельзя построить треугольникъ (49).

### Задачи на вычисленіе:

233. По данному основанію  $a$  и высотѣ  $h$  остроугольнаго тр.-ка вычислить сторону  $x$  квадрата, вписаннаго въ этотъ тр.-къ такъ, чтобы одна сторона квадрата лежала на основаніи тр.-ка, а двѣ вершины квадрата на боковыхъ сторонахъ тр.-ка.

234. Стороны тр.-ка суть 10 ф., 12 ф. и 17 ф. Вычислить отрезки стороны, равной 17 ф., на которые она дѣлится биссектрисой противолежащаго угла.

235. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ ее на два отрезка  $m$  и  $n$ . Вычислить катеты.

236. Вычислить высоту тр.-ка, опущенную на сторону, равную 20, если двѣ другія стороны суть 12 и 15.

237. Вычислить медианы тр.-ка, котораго стороны суть  $a=5$ ,  $b=7$  и  $c=9$ .

238. Въ тр.-ѣ  $ABC$  стороны суть:  $AB=7$ ,  $BC=15$  и  $AC=10$ . Определить, какого вида уголъ  $A$ , и вычислить высоту, опущенную на вершины  $B$ .

239. Изъ точки внѣ круга проведены касательная  $a$  и секущая. Вычислить длину секущей, зная, что отношеніе вѣншей ея части къ внутренней равно  $m:n$ .

240. Къ двумъ кругамъ, которыхъ радіусы суть  $R$  и  $r$ , а разстояніе между центрами  $d$ , проведена общая касательная. Определить вычисленіемъ положеніе точки пересѣченія этой касательной съ линіей центровъ во 1, когда эта точка лежитъ по одну сторону отъ центровъ, во 2, когда она расположена между ними.

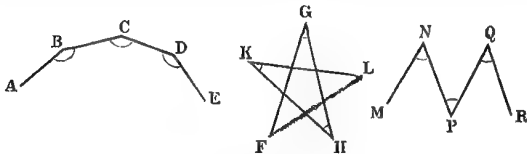
## Г Л А В А IV.

### Правильные многоугольники.

**225. Опребленія.** Ломаная линія наз. *правильной*, если она удовлетворяетъ слѣдующимъ тремъ условіямъ: 1°, отрезки



прямыхъ, составляющіе ее, равны,  $2^\circ$ , углы составленные каждымъ двумя сосѣдними отрѣзками, равны, и  $3^\circ$ , изъ каждаго трехъ послѣдовательныхъ отрѣзковъ первый и третій расположены по одну сторону отъ второго.

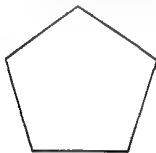


Черт. 168

Таковы, напр., линіи *ABCDE* и *FGHKI*; но ломаную *MNPQR* нельзя назвать правильною, потому что она не удовлетворяетъ третьему условію.

Правильная ломаная можетъ быть *выпуклой* (33), какъ напр., линія *ABCDE*.

Многоугольникъ наз. *правильнымъ*, если онъ ограниченъ замкнутою правильною ломаною линіею. Таковы, напр., квадратъ, равносторонній треугольникъ и другіе.



Черт. 169



Черт. 170

Многоугольникъ, изображенный на чертежѣ 169, есть *выпуклый* правильный пятиугольникъ; мн.-къ чертежа 170 также правильный пятиугольникъ, но не выпуклый (*звѣздчатый*). Мы будемъ разсматривать только выпуклые прав. мн.-ки.

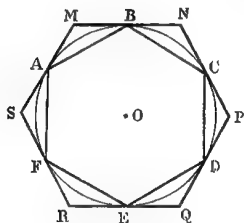
Слѣдующая теорема показываетъ, что выпуклые правильные многоугольники возможны съ произвольнымъ числомъ сторонъ (большимъ двухъ).

**226. Теорема.** Если окружность раздѣлена на произвольное число равныхъ частей (большее двухъ), то

1°, соединивъ хордами каждыя двѣ сосѣднія точки дѣленія, получимъ правильный описанный многоугольникъ;

2°, проведя черезъ всѣ точки дѣленія касательныя до взаимнаго пересѣченія, получимъ правильный описанный многоугольникъ.

Пусть окружность раздѣлена на нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ  $ABC\dots$  и черезъ эти точки проведены хорды  $AB, BC\dots$  и касательныя  $MN, NP\dots$ . Тогда:



Черт. 171

1°. Мног.-къ  $ABCDEF$  будетъ правильный, потому что всѣ его стороны равны (какъ хорды, стягивающія равныя дуги) и всѣ его углы равны (какъ вписанные, опирающіеся на равныя дуги).

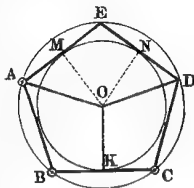
2°. Чтобы доказать правильность описаннаго многоугольника  $MNPQRS$ , рассмотримъ тр.-ки  $AMB, BNQ$  и т. д. У нихъ основанія  $AB, BC$  и т. д. равны; углы, прилежащіе къ осно-

ваніямъ, также равны, потому что каждый изъ нихъ имѣетъ одинаковую мѣру (уголъ, составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его). Значитъ, всѣ эти тр.-ки равнобедренныя и равны между собою; а потому  $MN=NP=\dots$  и  $M=N=\dots$  т. е. мн.-къ  $MNPQRS$  есть правильный.

**227. Замѣчаніе.** Если возьмемъ середины дугъ  $AB, BC, CD\dots$  (черт. 171), то получимъ точки, которыя дѣлятъ окружность на столько же равныхъ частей, на сколько она раздѣлена въ точкахъ  $A, B, C\dots$ . Поэтому, если черезъ эти середины проведемъ касательныя до взаимнаго пересѣченія, то получимъ также правильный описанный многоугольникъ; стороны этого многоугольника будутъ параллельны сторонамъ вписаннаго мн.-ка  $ABCDEF$ .

**228. Теорема.** Если многоугольник правильный, то  
 1°, около него можно описать окружность;  
 2°, въ него можно описать окружность.

1°. Проведемъ окружность черезъ какия-нибудь три сосѣднія вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  (черт. 172) правильного мн.-ка  $ABCDE$  и докажемъ, что она пройдетъ черезъ четвертую вершину  $D$ . Опустимъ изъ центра  $O$  перпендикуляръ  $OK$  на хорду  $BC$  и соединимъ  $O$  съ  $A$  и  $D$ . Повернемъ четырехугольникъ  $ABKO$  вокругъ стороны  $OK$  такъ, чтобы онъ упалъ на четырехуг.-къ  $ODCK$ . Тогда  $KB$  пойдеть по  $KC$  (вслѣдствіе равенства прямыхъ угловъ при точкѣ  $K$ ), точка  $B$  упадетъ въ  $C$  (такъ какъ хорда  $BC$  дѣлится въ точкѣ  $K$  пополамъ), сторона  $BA$  пойдеть по  $CD$  (вслѣдствіе равенства угловъ  $B$  и  $C$ ) и, наконецъ, точка  $A$  упадетъ въ  $D$  (вслѣдствіе равенства сторонъ  $BA$  и  $CD$ ). Изъ этого слѣдуетъ, что  $OA = OD$ , т.-е. точки  $A$  и  $D$  одинаково удалены отъ центра; поэтому вершина  $D$  должна лежать на окружности, проходящей черезъ  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Точно такъ же докажемъ, что эта окружность, проходя черезъ три точки,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , пройдетъ черезъ слѣдующую вершину  $E$  и т. д.



Черт. 172

2°. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что стороны правильного мн.-ка всегда можно разсматривать, какъ равныя хорды одной окружности; но такія хорды одинаково удалены отъ центра; значить, всѣ перпендикуляры  $OM$ ,  $ON$ ..., опущенные изъ  $O$  на стороны многоугольника, равны между собою, и потому окружность, описанная радиусомъ  $OM$  изъ центра  $O$ , будетъ вписанной въ мн.-къ  $ABCDE$ .

**229. Слѣдствіе.** Изъ предыдущаго видно, что окружности описанная около правильного мн.-ка и вписанная въ него имѣютъ одинъ и тотъ же центръ. Этотъ общій центръ, будучи одинаково удаленъ отъ всѣхъ вершинъ мн.-ка, долженъ лежать на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ середины любой стороны, а будучи одинаково удаленъ отъ сторонъ

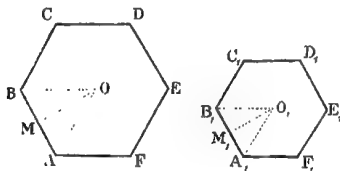
каждаго угла, онъ долженъ находиться на его биссектрисѣ. Поэтому, чтобы найти центръ описаннаго или вписаннаго круга, достаточно опредѣлить точку пересѣченія двухъ перпендикуляровъ къ серединамъ сторонъ, или двухъ биссектрисъ угловъ, или перпендикуляра съ биссектрисой.

**230. Опредѣленія.** Общій центръ окружности, описанной около правильнаго  $n$ -ка или вписанной въ него, наз. *центромъ* этого  $n$ -ка, радиусъ описанной окружности наз. *радиусомъ*  $n$ -ка, а радиусъ вписанной окружности — *апотемою* его.

Уголъ, составленный двумя радиусами, проведенными къ концамъ какой-нибудь стороны правильнаго  $n$ -ка, наз. *центральный уголъ*. Такихъ угловъ въ  $n$ -кѣ столько, сколько сторонъ; всѣ они равны, какъ измѣряющіеся равными дугами.

Такъ какъ сумма всѣхъ центральныхъ угловъ равна  $4d$  или  $360^\circ$ , то каждый изъ нихъ равенъ  $4d/n$  или  $360^\circ/n$ , если  $n$  означаетъ число сторонъ  $n$ -ка.

**231. Теорема.** *Правильные одноименные многоугольники подобны, и стороны ихъ относятся, какъ радиусы или апотемы.*



Черт. 173

1°. Чтобы доказать подобіе правильныхъ одноименныхъ  $n$ -ковъ  $ABCDEF$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , достаточно обнаружить, что у нихъ углы равны и стороны пропорціональны. И дѣйствительно, углы равны, такъ какъ каждый изъ нихъ содержитъ одно и то же число градусовъ, а именно  $\frac{180(n-2)}{n}$  (85), если  $n$  означаетъ число сторонъ каждаго  $n$ -ка; стороны же, очевидно, пропорціональны.

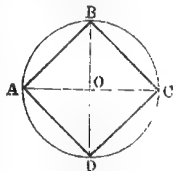
2°. Пусть  $O$  и  $O_1$  будутъ центры данныхъ мн.-ковъ,  $OA$  и  $O_1A_1$  ихъ радіусы,  $OM$  и  $O_1M_1$  — апокемы. Тр.-ки  $OAB$  и  $O_1A_1B_1$  подобны, такъ какъ углы одного соответственно равны угламъ другого. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1} \quad (181).$$

**232. Слѣдствіе.** Периметры правильныхъ многоугольниковъ относятся, какъ радіусы или апокемы (189).

**233. Задача.** Вписать въ данный кругъ квадратъ и определить его сторону въ зависимости отъ радіуса.

1°. Предположимъ, что  $AB$  есть сторона квадрата, вписаннаго въ данный кругъ  $O$ . Тогда дуга  $AB$  должна равняться  $\frac{1}{4}$  окружности, и уголъ  $AOB$  долженъ быть прямой. Поэтому, для построения вписаннаго квадрата, достаточно провести два перпендикулярныхъ діаметра  $AC$  и  $BD$  и концы ихъ соединить хордами. Четыреугольникъ  $ABCD$  будетъ правильнымъ, потому что дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  равны, какъ соответствующія равнымъ центральнымъ угламъ.



Черт. 174

2°. Изъ прямоугольнаго тр.-ка  $AOB$  находимъ:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2, \text{ т.-е. } AB^2 = 2AO^2$$

откуда

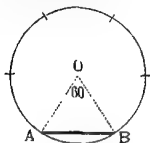
$$AB = AO\sqrt{2}$$

Условимся всегда обозначать черезъ  $a_n$  численную величину стороны прав. вписан. мн.-ка, имѣющаго  $n$  сторонъ, а черезъ  $R$  радіусъ круга; тогда выведенное равенство изобразится такъ:

$$a_4 = R\sqrt{2}$$

**234. Задача.** Вписать въ данный кругъ правильный шестиугольникъ и определить его сторону въ зависимости отъ радіуса.

Предположимъ, что  $AB$  есть сторона прав. вписан. шестиугольника. Тогда дуга  $AB$  должна быть  $\frac{1}{6}$  часть окружности, и, слѣд., уголъ  $AOB$  долженъ содержать  $60^\circ$ . Такъ какъ тр.-къ  $AOB$  равнобедренный ( $AO=OB$ ), то углы  $A$  и  $B$  равны и каждый изъ нихъ содержитъ по  $\frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ)$ , т.-е. по  $60^\circ$ . Такимъ образомъ, тр.-къ  $AOB$  оказывается равноугольнымъ и, слѣд., равностороннимъ, т.-е.  $AB=AO=OB$ . Итакъ, стороны прав. впис. шестиугольника равны радиусу, что,



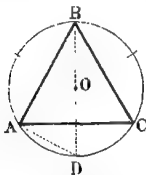
Черт. 175

по принятому нами обозначенію, можно выразить такъ:

$$a_6 = R$$

Отсюда возникаетъ весьма простой способъ построения прав. впис. шестиугольника (или дѣленія окружности на 6 равныхъ частей): давъ циркулю раствореніе, равное радиусу, откладываютъ этимъ растворомъ по окружности, одна за другою, равныя дуги и точки дѣленія соединяють хордами.

**235. Задача.** Вписать въ данный кругъ правильный треугольникъ и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радиуса.



Черт. 176

1°. Чтобы раздѣлить окружность на 3 равныя части, дѣлятъ ее сначала на 6 равныхъ частей (какъ указано въ предыдущей задачѣ) и затѣмъ соединяють по двѣ части въ одну.

2°. Для опредѣленія стороны  $AB$  проведемъ діаметръ  $BD$  и хорду  $AD$ . Тр.-къ  $ABD$  прямоугольный при вершинѣ  $A$ ; поэтому  $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2}$ . Но  $BD = 2R$  и  $AD = R$  (потому что дуга  $AD$  есть

$\frac{1}{6}$  часть окружности и, слѣд., хорда  $AD$  есть сторона прав. впис. шестиугольника); значить:

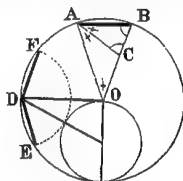
$$a_3 = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$$

**236. Задача.** Вписать въ данный кругъ правильный де-

десятиугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса.

Предварительно докажем одно важное свойство прав. десятиугольника. Пусть хорда  $AB$  (черт. 177) будет сторона такого многоугольника. Тогда угол  $AOB$  равен  $36^\circ$ , а каждый из углов  $A$  и  $B$  содержит по  $\frac{1}{2}$  ( $180^\circ - 36^\circ$ ), т.-е. по  $72^\circ$ . Разделим угол  $A$  пополам прямою  $AO$ . Каждый из углов, образовавшихся при точке  $A$ , будет равен  $36^\circ$ ; слѣд.,  $\triangle ACO$ , имѣя два равных угла, будет равнобедренный, т.-е.  $AC=CO$ .  $\triangle ABC$  также равнобедренный, потому что  $B=72^\circ$  и  $C=180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ ; слѣд.,  $AB=AC=CO$ . По свойству биссектрисы угла тр.-ка (198) можем написать:

$$AO : AB = OC : CB \quad [1]$$



Черт. 177

Замѣнивъ  $AO$  и  $AB$  равными имъ прямыми  $OB$  и  $OC$ , получимъ:

$$OB : OC = OC : CB \quad [2]$$

т.-е. радиусъ  $OB$  раздѣленъ въ точкѣ  $O$  въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (222), причемъ  $OC$  есть его большая часть. Но  $OC$  равна сторонѣ прав. впис. десятиугольника; значить:

*сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равна большей части радиуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*

Теперь задача рѣшается легко:

1°. Дѣлять радиусъ круга въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (222); затѣмъ, давъ циркулю раствореніе, равное большей части радиуса, откладываютъ имъ по окружности дуги, одна за другою, и точки дѣленія соединяютъ хордами (это построеніе указано на черт. 177; хорды  $DE$  и  $DF$  суть двѣ смежныя стороны прав. 10-угольника).

2°. Пропорцію [2] можно переписать такъ:

$$R : a_{10} = a_{10} : R - a_{10}$$

откуда

$$a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ:

$$a_{10} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

**237. Замѣчанія.** 1°. Формулы, выведенныя нами въ предыдущихъ задачахъ для  $a_1$ ,  $a_5$ ,  $a_3$  и  $a_{10}$ , позволяютъ вычислить радиусъ описаннаго круга по данной сторонѣ прав. многоугольника. Такъ, изъ выраженіи, опредѣляющаго  $a_{10}$ , найдемъ:

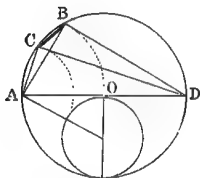
$$R = \frac{2a_{10}}{\sqrt{5}-1} = \frac{2a_{10}(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1}{2} a_{10} (\sqrt{5}+1)$$

2°. Чтобы вписать въ данный кругъ прав. пятиугольникъ, дѣлять окружность на 10 равныхъ частей (какъ указано выше) и точки дѣленія соединяють чередъ одну хордами.

**238. Задача.** Вписать въ данный кругъ правильный пятинадцатигульникъ.

Чтобы найти  $\frac{1}{15}$  окружности, достаточно изъ  $\frac{1}{6}$  ея части вычесть  $\frac{1}{10}$ . Это видно изъ слѣдующаго тождества:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$



Черт. 178

Поэтому, если дуга  $AB$  есть  $\frac{1}{6}$  окружности, а дуга  $AC$  есть  $\frac{1}{10}$  часть ея, то дуга  $CB$  будетъ  $\frac{1}{15}$  окружности, а хорда  $CB$  — сторона прав. впис. 15-угольника.

Вычисленіе стороны  $CB$  можно выполнить, применивъ теорему Птолемея (215) къ четырехугольнику  $ACBD$ , въ которомъ  $AC = a_{10}$ ,  $CB = a_{15}$ ,  $AD = 2R$ ,  $AB = a_6 = R$ ,  $CD = \sqrt{4R^2 - a_{10}^2}$ ,  $BD = a_3$  (такъ какъ дуга равна  $\frac{1}{3}$  окружности).

Теорема Птолемея даетъ:

$$AB \cdot CD = AD \cdot CB + AC \cdot BD$$

т.-е.

$$R \sqrt{4R^2 - a_{10}^2} = 2R \cdot a_{15} + a_{10} a_3$$

Подставляя на мѣсто  $a_{10}$  и  $a_3$  ихъ выраженія, получимъ послѣ упрощеній:

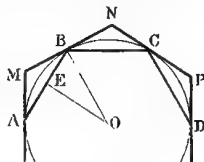
$$a_{15} = \frac{1}{4} R \left[ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1) \right]$$



**239. Задача.** По данному радиусу круга и стороны правильного вписанного многоугольника вычислить сторону правильного одноименного описанного многоугольника.

Пусть  $ABCD\dots$  будет прав. впис. мн.-къ, а  $MNP\dots$  одноименный прав. описанный. Так как стороны правильных одноименных мн.-ков относятся, как их радиусы или апоэмы (231), то:

$$MN : AB = OB : OE$$



Черт. 179

Откуда: 
$$MN = \frac{OB \cdot AB}{OE} = \frac{OB \cdot AB}{\sqrt{OB^2 - BE^2}}$$

Обозначивъ  $MN$ ,  $AB$  и  $OB$  соответственно черезъ  $b_n$ ,  $a_n$  и  $R$  и замѣтивъ, что  $BE = \frac{1}{2}AB$ , будемъ имѣть:

$$b_n = \frac{Ra_n}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

**Примѣръ.** Вычислимъ сторону прав. описаннаго 10-угольника:

$$\begin{aligned} b_{10} &= \frac{Ra_{10}}{\sqrt{R^2 - \frac{a_{10}^2}{4}}} = 2R \sqrt{\frac{a_{10}^2}{4R^2 - a_{10}^2}} = 2R \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16 - (\sqrt{5}-1)^2}} = \\ &= 2R \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = R2 \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}} = 2R \sqrt{\frac{10-4\sqrt{5}}{10}} \end{aligned}$$

**240. Замѣчаніе.** Формула, опредѣляющая  $b_n$ , позволяетъ вычислить  $a_n$  по даннымъ  $b_n$  и  $R$ . Для этого стоитъ только рѣшить уравненіе, принимая  $a_n$  за неизвѣстную:

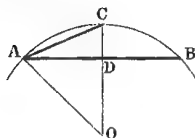
$$b_n^2 \left( R^2 - \frac{a_n^2}{4} \right) = R^2 a_n^2; \quad b_n^2 R^2 = a_n^2 \left( R^2 + \frac{b_n^2}{4} \right)$$

$$a_n = \frac{Rb_n}{\sqrt{R^2 + \frac{b_n^2}{4}}}$$

**241. Задача.** Удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника.

Въ этомъ сокращенномъ выраженіи разумѣются собственно

двѣ задачи: 1°, по данному правильному впис.  $m$ -ку построить другой  $m$ -кѣ, вписанный въ ту же окружность и имѣющій вдвое болѣе сторонъ; 2°, вычислить сторону этого  $m$ -ка по данной сторонѣ перваго  $m$ -ка и данному радиусу круга.



Черт. 180

1°. Пусть  $AB$  есть сторона прав. впис.  $m$ -ка, имѣющаго  $n$  сторонъ, и  $O$  центръ круга. Проведемъ  $OC \perp AB$  и соединимъ  $A$  съ  $C$ . Дуга  $AB$  дѣлится въ точкѣ  $C$  пополамъ; слѣд., хорда  $AC$  будетъ сторона прав. впис.  $m$ -ка, имѣющаго  $2n$  сторонъ.

димъ (208):

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD$$

$$\text{т.-е. } a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD$$

Изъ прямоугольнаго тр.-ка  $ADO$  опредѣлимъ катетъ  $OD$ :

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

Слѣд. 
$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

Такова формула удвоенія числа сторонъ прав. впис. многоугольника

**Примѣръ.** Вычислить сторону прав. впис. 12-угольника:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{\frac{3R^2}{4}}} \\ &= \sqrt{2R^2 - 2R^2 \sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2R^2 - R^2 \sqrt{3}} = R \sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

**242.** На сколько равныхъ частей можно дѣлить окружность помощью циркуля и линейки. Примѣняя указанные въ предыдущихъ задачахъ способы, мы можемъ помощью циркуля

и линейки дѣлить окружность на такое число равныхъ частей, которое заключается въ слѣдующихъ рядахъ:

3, 3.2, 3.2.2.... вообще  $3 \cdot 2^n$   
 4, 4.2, 4.2.2.... вообще  $2^n$   
 5, 5.2, 5.2.2.... вообще  $5 \cdot 2^n$   
 15, 15.2, 15.2.2.... вообще  $3 \cdot 5 \cdot 2^n$

Германскій математикъ Гауссъ (умершій въ 1855 г.) доказалъ, что посредствомъ циркуля и линейки можно дѣлить окружность на такое число равныхъ частей, которое, будучи простымъ, выражается формулою  $2^n + 1$ . Напр., окружность можно раздѣлить на 17 равныхъ частей, такъ какъ 17 есть число простое вида  $2^n + 1$  ( $17 = 2^4 + 1$ ). Доказательство Гауссса выходитъ изъ предѣловъ элементарной математики.

На всякое иное число равныхъ частей окружность можетъ быть раздѣлена только *приблизженно*.

**243. Построеніе правильнаго многоугольника по данной сторонѣ.** Для различныхъ правильныхъ мн.-ковъ существуютъ различные способы. Но можно указать слѣдующій *общій способъ*. Чертить окружность произвольнаго радіуса и вписывать въ нее прав. мн.-къ съ такимъ числомъ сторонъ, которое должно быть у искомаго мн.-ка; затѣмъ на данной сторонѣ строить мн.-къ, подобный вписанному (190).

## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

241. Составить формулу для стороны правильнаго вписаннаго 24-угольника.

242. Составить формулы для сторонъ правильныхъ вписанныхъ 8-угольника и 16-угольника.

243. Исходя изъ формулы удвоенія, опредѣлить сторону прав. впис. 5-угольника.

244. Составить формулы для сторонъ правильныхъ описанныхъ треугольника и шестигульника.

245. Доказать, что если въ прав. 5-угольникѣ проведемъ всѣ діагонали, то онѣ своими пересѣченіями образуютъ внутренній прав. 5-угольникъ.

246. Пусть  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  будутъ три послѣдовательныя стороны правильнаго мн. ка, имѣющаго центръ въ  $O$ . Если продолжимъ стороны  $AB$  и  $CD$  до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ  $E$ , то четырехугольникъ  $OAEOS$  можетъ быть вписанъ въ окружность.

247. Доказать, что: 1<sup>о</sup>, всякій вписанный равносторонній многоугольникъ есть правильный; 2<sup>о</sup>, равноугольный вписанный мн.-къ есть правильный, когда число сторонъ его нечетное; 3<sup>о</sup>, всякій описанный равноугольный мн.-къ есть правильный; 4<sup>о</sup>, описанный равносторонній мн.-къ есть правильный, когда число сторонъ его нечетное.

248. Доказать, что двѣ діагонали правильнаго  $n$ -угольника, не исходящія изъ одной вершины, пересѣкаются въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

249. На данной сторонѣ построить прав. 8-угольникъ.

250. На данной сторонѣ построить прав. 10-угольникъ.

251. Сръзвать отъ даннаго квадрата углы такъ, чтобы образовался правильный 8-угольникъ.

252. Въ данный квадратъ вписать равносторонній тр.-къ, помѣщая одну изъ его вершинъ или въ вершинѣ квадрата, или съ срединѣ какой либо стороны.

253. Вписать въ равносторонній тр.-къ другой равносторонній треугольникъ, котораго стороны были бы перпендикулярны къ сторонамъ даннаго.

254. Построить углы: въ 18, въ 30, въ 7°, въ 72 градуса.

## КНИГА IV.

### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЯ ЧАСТЕЙ.

#### ГЛАВА I.

##### Основные свойства предѣловъ.

**244. Величины постоянныя и переменныя.** Рѣшая какой либо вопросъ, въ который входятъ нѣсколько величинъ, мы иногда предполагаемъ, что нѣкоторыя изъ этихъ величинъ сохраняютъ одно и то же значеніе, тогда какъ другія способны принимать безчисленное множество различныхъ значеній. Первые величины наз. *постоянными*, вторыя — *переменными*. Такъ, рассматривая зависимость между длиною хорды и ея разстояніемъ отъ центра, мы считаемъ радіусъ круга величи-

ною постоянною, а длину хорды и ея разстояніе отъ центра— величинами переменными.

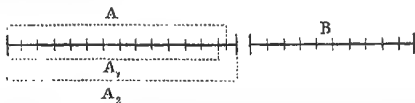
**245. Величины, стремящіяся къ нулю.** Если переменная величина, измѣняясь, дѣлается меньше какого угодно малаго даннаго значенія и при дальнѣйшемъ измѣненіи постоянно остается меньше этого значенія, то говорятъ, что эта переменная величина *стремится къ нулю*.

Напр., если изъ одной точки окружности проведемъ касательную и сѣкущую (см. черт. 97) и затѣмъ станемъ вращать сѣкущую вокругъ точки касанія такъ, чтобы вторая точка пересѣченія все ближе и ближе придвигалась къ точкѣ касанія, то при этомъ уголъ, составленный касательною и сѣкущею, будетъ стремиться къ нулю, потому что онъ можетъ сдѣлаться меньше какого угодно малаго угла, напр. меньше угла въ  $1'$ , и, при дальнѣйшемъ сближеніи точекъ пересѣченія, будетъ постоянно *оставаться* меньше этого угла. Точно также центральный уголъ правильнаго многоугольника стремится къ 0, если число сторонъ этого мн.-ка неограниченно возрастаетъ.

**246. Величины, стремящіяся къ предѣлу.** Иногда случается, что переменная величина, измѣняясь, стремится къ нѣкоторому предѣлу.

*Предѣломъ переменной величины наз. такая постоянная величина, къ которой переменная приближается все ближе и ближе такъ, что разность между ними стремится къ нулю.*

Приведемъ два примѣра переменныхъ величинъ, стремящихся къ предѣламъ.



Черт. 181

Для перваго примѣра рассмотримъ процессъ измѣренія какой-нибудь длины  $A$ , несоизмѣримой съ единицею  $B$ . Чтобы измѣрить такую длину ( $143,2^\circ$ ), мы дѣлимъ  $B$  на  $n$  равныхъ частей и одну изъ нихъ откладываемъ на  $A$  столько разъ,

сколько можно. Тогда мы получаемъ соизмѣримую длину  $A_1$ , которая меньше  $A$ ; если же отложимъ  $1/n$  долю  $B$  еще одинъ разъ, то получимъ другую соизмѣримую длину  $A_2$ , которая больше  $A$ ; при этомъ каждая изъ разностей  $A - A_1$  и  $A_2 - A$  меньше  $1/n$  доли  $B$ . Предположимъ теперь, что число  $n$  равныхъ частей, на которое мы дѣлимъ  $B$ , увеличивается неограниченно. Тогда длины  $A_1$  и  $A_2$  становятся переменными: каждая изъ нихъ стремится къ предѣлу  $A$ , такъ какъ разности между этою постоянною величиною и переменными  $A_1$  и  $A_2$  стремятся къ 0, т.-е. дѣлаются и остаются меньше какой угодно малой данной длины.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что переменная, приближаясь къ своему предѣлу, можетъ быть или больше его, или меньше; такъ, длина  $A_1$  постоянно остается меньшею, чѣмъ  $A$ , а длина  $A_2$ , наоборотъ, всегда больше  $A$ .

Для второго примѣра возьмемъ величину угла правильнаго  $n$ -угольника, имѣющаго  $n$  сторонъ. Эта величина равна

$$\frac{2d(n-2)}{n} = 2d - \frac{4d}{n}$$

Предположимъ, что число сторонъ  $n$ -угольника неограниченно увеличивается; тогда, какъ видно изъ написанной формулы, величина угла  $n$ -ка будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ  $2d$ , такъ что разность между ними, равная  $\frac{4d}{n}$ , дѣлается и остается меньше какого угодно малаго угла.

Поэтому можно сказать, что уголъ прав.  $n$ -ка, при неограниченномъ увеличеніи числа его сторонъ, имѣетъ предѣлъ  $2d$ .

**§ 47. Величины, увеличивающіяся безпредѣльно.** Если переменная величина, измѣняясь, дѣлается и остается больше какого угодно большого данного значенія, то говорить, что она увеличивается *безпредѣльно* (или неограниченно).

Напр., сумма угловъ выпуклаго  $n$ -угольника, равная  $2d(n-2)$ , при неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ, увеличивается безпредѣльно \*).

\*) Величины, увеличивающіяся безпредѣльно, принято въ математикѣ называть *безконечно большими*, а величины, стремящіяся къ нулю, — *безконечно малыми*. Въ этой книгѣ мы не будемъ однако употреблять этихъ терминовъ для избѣжанія какой-либо неясности представленія въ умѣ учащагося.

**248. Теорема.** Если две переменныя величины, стремящіяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равными между собою, то равны и ихъ предѣлы.

Пусть  $a$  и  $b$  будутъ двѣ переменныя величины, а  $A$  и  $B$  ихъ предѣлы, и положимъ, что при всѣхъ послѣдовательныхъ измѣненіяхъ переменныя  $a$  и  $b$  всегда равны между собою; требуется доказать, что въ такомъ случаѣ  $A=B$ . — Предположимъ противное. Пусть, напр.,  $A > B$ . Тогда разность  $A-B$  должна равняться какой-нибудь постоянной величинѣ, не равной нулю. Обозначимъ эту разность черезъ  $d$ . Чтобы опровергнуть наше предположеніе, положимъ, что

$$a = A + x \text{ и } b = B + y$$

гдѣ  $x$  и  $y$ , означая разности между переменными и ихъ предѣлами, суть величины, стремящіяся къ 0. Такъ какъ, по условію,  $a=b$ , то значить:

$$A + x = B + y$$

откуда:

$$A - B = y - x$$

т.-е.

$$d = y - x$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ разность между величинами  $y$  и  $x$ , изъ которыхъ каждая стремится къ 0, не можетъ равняться постоянной величинѣ  $d$ . Невозможность равенства доказываетъ невозможность допущенія, что  $A > B$ . Такъ же докажемъ, что  $A$  не можетъ быть меньше  $B$ . Слѣд.,  $A=B$ .

**249. Теорема.** Если две переменныя величины, стремящіяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ сохраняютъ одно и то же отношеніе, то въ томъ же отношеніи находятся и ихъ предѣлы.

Пусть  $a$  и  $b$  будутъ двѣ переменныя величины, а  $A$  и  $B$  ихъ предѣлы, и положимъ, что при всѣхъ измѣненіяхъ величины  $a$  и  $b$  постоянно удовлетворяютъ пропорціи:

$$a : b = m : n$$

гдѣ  $m$  и  $n$  какія-нибудь данныя числа. Требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и

$$A : B = m : n$$

Положимъ снова, что  $a = A + x$  и  $b = B + y$ , гдѣ  $x$  и  $y$ , означая разности между переменными и ихъ предѣлами, должны быть величинами, стремящимися къ нулю. Подставивъ въ данную пропорцію на мѣсто  $a$  и  $b$  суммы  $A + x$  и  $B + y$ , получимъ:

$$A + x : B + y = m : n$$

Откуда:

$$An + nx = Bm + my$$

Такъ какъ величина  $x$  стремится къ нулю, то и произведение  $nx$  стремится къ нулю;\*) поэтому сумма  $An + nx$  представляетъ собою переменную величину, которой предѣлъ есть постоянная величина  $An$ . Подобно этому сумма  $Bm + my$  есть переменная величина, имѣющая предѣлъ  $Bm$ . Но если равны переменныя, то должны быть равны и ихъ предѣлы; значить:

$$An = Bm$$

Откуда:

$$A : B = m : n$$

**230. Основное начало способа предѣловъ.** Двѣ предущія теоремы составляютъ частные случаи слѣдующаго важнаго предложенія:

*Если какое либо равенство, содержащее переменныя величины, остается вѣрнымъ при всякомъ измѣненіи переменныхъ, то оно останется вѣрнымъ и тогда, когда на мѣсто переменныхъ подставимъ ихъ предѣлы.*

Это предложеніе служитъ основаніемъ такъ называемому способу предѣловъ, которымъ иногда пользуются для доказательства нѣкоторыхъ геометрическихъ истинъ.

**231. Способъ предѣловъ.** Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ, что мы желаемъ найти зависимость между нѣкоторыми постоянными величинами  $A$  и  $B$ , и допустимъ, что

\*) Мы принимаемъ безъ доказательства, что если въ произведеніи одинъ сомножитель постоянный, а другой стремится къ 0, то и произведеніе стремится къ 0.



эту зависимость трудно (или даже невозможно) найти непосредственно. Тогда задаемся вопросом: нельзя ли величины  $A$  и  $B$  рассматривать, какъ *предельны* нѣкоторыхъ переменныхъ величинъ  $a$  и  $b$ , и если можно, то какова зависимость между  $a$  и  $b$ . Положимъ, оказалось, что эта зависимость выражается равенствомъ:

$$a = 3b^2$$

которое остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ  $a$  и  $b$ ; въ такомъ случаѣ можемъ принять, что это равенство остается вѣрнымъ и тогда, когда на мѣсто  $a$  и  $b$  подставимъ ихъ предѣлы, т.-е. что и

$$A = 3B^2$$

Такимъ образомъ, зависимость между  $A$  и  $B$  мы найдемъ косвеннымъ путемъ, отыскавъ предварительно зависимость между переменными.

----

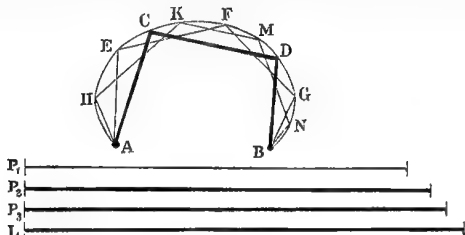
## ГЛАВА II.

### Вычисленіе длины окружности.

**§ 32. Предварительное разъясненіе.** Конечную прямую можно сравнивать съ другою конечною прямою, принятою за единицу, вследствие того, что прямые линіи при наложеніи *совмѣщаются*. Дѣйствительно, только по этой причинѣ мы можемъ совершенно точно установить, какія прямые считать равными и неравными, что такое сумма прямыхъ, какая прямая болѣе другой въ 2, 3, 4... раза, и т. п. Точно также дуги окружностей одинаковаго радіуса можно сравнивать между собою вследствие того, что такіе дуги при наложеніи совмѣщаются. Но извѣстно, что никакая часть окружности или какой бы то ни было другой кривой не можетъ совмѣститься съ прямой (107); поэтому нельзя установить путемъ наложенія, какой криволинейный отрѣзокъ должно считать равнымъ данному прямолинейному отрѣзку, а слѣд. и то, какой кри-

вогнутый отрезок больше данного прямолинейного в 2, 3, 4... раза. Таким образом является необходимость *опредѣлить*, что мы разумѣемъ подъ длиною кривой линіи, когда сравниваемъ ее съ прямолинейнымъ отрезкомъ. Слѣдующее опредѣленіе приводитъ понятіе о длинѣ кривой къ элементарному понятію о длинѣ прямой.

**233. Опредѣленіе длины кривой.** Пусть мы имѣемъ какую-нибудь конечную кривую  $AB$ . Впишемъ въ нее произ-



Черт. 182

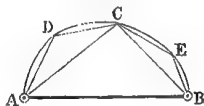
вольную ломаную  $ACDB$ , которой концы совпадаютъ съ концами кривой. Найдемъ периметръ этой ломаной, т.-е. сумму всѣхъ ея сторонъ; пусть это будетъ прямая  $P_1$ . Впишемъ теперь другую ломаную, напр.  $AEFGB$ , у которой стороны были бы меньше, чѣмъ у первой ломаной, и слѣд. число сторонъ больше; найдемъ ея периметръ; пусть это будетъ прямая  $P_2$ . Впишемъ далѣе третью ломаную, напр.  $ANKMNB$ , у которой стороны были бы еще меньше, а число сторонъ еще больше, и найдемъ ея периметръ; пусть это будетъ  $P_3$ . Вообразимъ теперь, что мы продолжаемъ вписывать въ данную кривую все новыя и новыя ломаныя линіи, у которыхъ стороны неограниченно уменьшаются, и каждый разъ находимъ ихъ периметры. Тогда получимъ безконечный рядъ периметровъ ( $P_1, P_2, P_3, \dots$ ). Доказано (265), что этотъ рядъ стремится къ нѣкоторому предѣлу (напр. къ длинѣ  $L$ ), вполне опредѣленному для данной кривой. Этотъ-то предѣлъ и принимаютъ за длину кривой  $AB$ .

Такимъ образомъ, *длиною конечной кривой* называется предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписанной ломаной линіи, когда стороны ея неограниченно уменьшаются.

**254. Слѣдствіе 1.** *Отрѣзокъ прямой короче всякой кривой, проведенной между его концами.*

Что отрѣзокъ прямой короче всякой ломаной, проведенной между его концами, было доказано ранѣе (51). Теперь можемъ доказать ту же истину въ примѣненіи къ кривой. Пусть  $AB$  будетъ отрѣзокъ прямой, а  $ACB$  какая-нибудь кривая, проведенная между концами  $A$  и  $B$ .

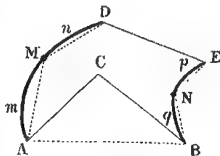
Впишемъ въ кривую произвольную ломаную, напр.  $ACB$ , и затѣмъ вообразимъ, что число сторонъ этой ломаной неограниченно *удваивается*, т.-е. что вмѣсто ломаной  $ACB$ , состоящей изъ двухъ сторонъ, берется вписанная ломаная  $ADCEB$ , состоящая изъ 4-хъ сторонъ, затѣмъ вмѣсто этой берется вписанная ломаная, состоящая изъ 8-ми сторонъ, и т.-д. безъ конца. Отъ этого периметръ ломаной будетъ все *увеличиваться* (напр.,  $AD + DC + CE + EB$  больше  $AC + CB$ , потому что  $AD + DC > AC$  и  $CE + EB > CB$ ); значить, предѣлъ, къ которому онъ стремится, будетъ больше ломаной  $ACB$ , а потому, и по-давни, больше прямой  $AB$ . Но предѣлъ периметра вписанной ломаной есть то, что наз. *длиною кривой*; слѣд. длина кривой  $ACB$  больше прямой  $AB$ .



Черт. 183

**255. Слѣдствіе 2.** *Выпуклая линія короче всякой другой линіи, объемлющей ее.*

Для ломаныхъ линій это предположеніе было доказано ранѣе (52). Убѣдимся теперь, что во 1° выпуклая ломаная короче объемлющей *кривой*, и во 2° выпуклая *кривая* короче всякой объемлющей (кривой или ломаной).



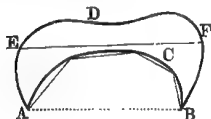
Черт. 184

1°. Пусть  $AOB$  есть выпуклая ломаная, а  $AmnDFpqB$  какая-нибудь объемлющая линія (кри-

вая или составленная изъ частей кривыхъ и прямолинейныхъ). Возьмемъ на ней какія-нибудь точки  $M$  и  $N$  и проведемъ хорды  $AM$ ,  $MD$ ,  $EN$  и  $NB$ . Тогда получимъ ломаную  $AMDENB$ , которая по отношенію къ ломаной  $ACB$  будетъ объемлющая; слѣд. (52):

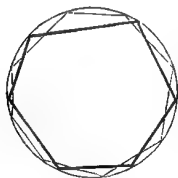
$$AM + MD + DE + EN + NB > AC + CB$$

Такъ какъ дуга  $AmM$  больше хорды  $AM$ , дуга  $MnD$  больше хорды  $MD$  и т. д., то длина линіи  $AmnDEpqB$  больше периметра ломаной  $AMDENB$ ; слѣд., она я подавно больше ломаной  $ACB$ .



Черт. 185

меньше объемлющей линіи  $AEFB$  (по доказанному въ первой части этого предложенія); вслѣдствіе этого предѣлъ периметровъ вписанныхъ ломаныхъ, т.-е. длина кривой  $ACB$ , не можетъ быть больше линіи  $AEFB$ ; но эта линія короче кривой  $ADB$ ; значить, длина кривой  $ACB$  меньше длины кривой  $ADB$ .



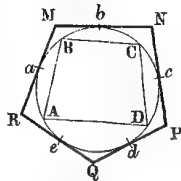
Черт. 186

2°. Пусть  $ACB$  есть выпуклая кривая, а  $ADB$  какая-нибудь объемлющая линія (кривая или ломаная). Выберемъ на объемлющей линіи такія двѣ точки  $E$  и  $F$ , чтобы прямая  $EF$  не пересѣкалась съ кривою  $ACB$ . Всѣ ломанныя линіи, вписанныя въ эту кривую, будутъ тогда

**256. Длина окружности.** Согласно данному выше опредѣленію, за длину окружности принимаютъ предѣлъ, къ которому стремятся периметры вписаннаго многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются, и, слѣд., число сторонъ неограниченно увеличивается.

**257. Сравненіе длины окружности съ периметрами вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ.** Пусть въ данную окружность вписанъ какой-нибудь многоугольникъ  $ABCD$  и описанъ какой-

нибудь многоугольникъ  $MNPQR$ . Такъ какъ дуга  $AB$  больше хорды  $AB$ , дуга  $BC$  больше хорды  $BC$  и т. д., то окружность больше периметра всякаго вписаннаго многоугольника. Съ другой стороны, такъ какъ дуга  $ab$  меньше  $aM + Mb$ , дуга  $bc$  меньше  $bN + Nc$  и т. д., то окружность меньше периметра всякаго описаннаго многоугольника.



Черт. 187

Напр., окружность больше периметра правильнаго вписаннаго шестиугольника и меньше периметра описаннаго квадрата; значить, окружность больше 6-ти радиусовъ и меньше 8-ми радиусовъ (такъ какъ сторона прав. впис. шестиугольника равна радиусу, а сторона описаннаго квадрата — диаметру).

Для болѣе точнаго вычисленія длины окружности въ зависимости отъ радиуса докажемъ слѣдующую теорему.

**258. Теорема.** Окружности относятся, какъ радиусы или диаметры.

Пусть  $R$  и  $R_1$  будутъ радиусы двухъ окружностей, а  $C$  и  $C_1$  ихъ длины; требуется доказать, что

$$C : C_1 = R : R_1 = 2R : 2R_1$$

Впишемъ въ данныя окружности какіе-нибудь правильные одноименные многоугольники (напр., шестиугольники) и затѣмъ вообразимъ, что число ихъ сторонъ неограниченно удваивается (т.-е. вмѣсто шестиугольниковъ берутся 12-угольники, затѣмъ 24-угольники и т. д. безъ конца). Обозначимъ периметры этихъ многоугольниковъ черезъ  $p$  и  $p_1$ . Тогда будемъ имѣть пропорцію (232):

$$p : p_1 = R : R_1$$

Но если периметрныя величины сохраняютъ одно и то же отношеніе, то и предѣлы ихъ находятся въ томъ же отношеніи (249); предѣлы же периметровъ  $p$  и  $p_1$  будутъ длины окружностей  $C$  и  $C_1$ ; значить:

$$C : C_1 = R : R_1$$

Умноживъ оба члена второго отношенія на 2, получимъ:

$$C : C_1 = 2R : 2R_1$$

**259. Слѣдствія. 1°.** Переставивъ въ послѣдней пропорціи средніе члены, будемъ имѣть:

$$C : 2R = C_1 : 2R_1$$

т.-е. *отношеніе окружности къ своему діаметру есть число постоянное для всѣхъ окружностей.*

Это число обозначаютъ греческою буквою  $\pi$ .

2°. Зная радіусъ и число  $\pi$ , мы можемъ вычислить длину окружности изъ равенства:

$$C : 2R = \pi; \text{ откуда } C = 2\pi R$$

т.-е. *длина окружности равна произведенію ея радіуса на удвоенное отношеніе окружности къ діаметру.*

**260. Понятіе о вычисленіи  $\pi$ .** Доказано, что отношеніе окружности къ діаметру есть число *несоизмѣримое* \*) и потому не можетъ быть выражено точно ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ. Но можно найти приближенное значеніе  $\pi$  съ какою угодно точностью. Укажемъ одинъ изъ способовъ этого вычисленія.

Если радіусъ примемъ за единицу длины, то длина окружности выразится числомъ  $2\pi$ . Поэтому можно сказать, что  $\pi$  есть длина полуокружности единичнаго радіуса. Чтобы вычислить полуокружность съ нѣкоторымъ приближеніемъ, подходятъ полупериметры правильныхъ вписанныхъ мн.-ковъ, которые получаются черезъ удвоеніе какого-нибудь одного изъ нихъ, напр. шестигульника. Для этого предварительно подходятъ длины сторонъ этихъ мн.-ковъ, а затѣмъ полупериметры. Обозначая, по принятому, черезъ  $n$  сторону прав. впис. мн.-ка, имѣющаго  $n$  сторонъ, будемъ имѣть:

$$a_n = R = 1$$

---

\*) и даже, болѣе того, число *трансцендентное*, т.-е. такое, которое не можетъ служить корнемъ никакаго алгебраическаго уравненія. См. брошюру А. Маркова: „Доказательство трансцендентности чиселъ  $e$  и  $\pi$ “, С.-Петербургъ, 1883 г.

Примѣняя теперь формулу удвоенія (241). т.-е.  $a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$ , находимъ:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3} = 0,26795...$$

Послѣ этого, пользуясь тою же формулою, послѣдовательно вычисляемъ:

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}; \quad a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}} \text{ и т. д.}$$

Положимъ, что мы прекратили удвоеніе на 96-угольникъ. Чтобы получить его полупериметръ, надо сторону умножить на 48. Сдѣлавъ всѣ упрощенія и вычисления, найдемъ (обозначая периметръ буквою  $p$  съ соответствующимъ знакомъ):

$$\frac{1}{2} p_{96} = 48 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 3,1410319...$$

Если полупериметръ 96-угольника примемъ за длину полуокружности, то, конечно, сдѣлаемъ нѣкоторую погрѣшность. Чтобы судить о величинѣ ея, вычислимъ еще полупериметръ правильного описаннаго 96-угольника. Для этого воспользуемся формулою, дающей выраженіе для стороны описаннаго мн.-ка по сторонѣ вписаннаго (239):

$$b_{96} = \frac{Ra_{96}}{\sqrt{R^2 - \frac{a_{96}^2}{4}}} = \frac{a_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a_{96}^2}{4}}}$$

$$\text{отсюда:} \quad \frac{1}{2} P_{96} = \frac{48a_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a_{96}^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2} p_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a_{96}^2}{4}}}$$

гдѣ  $P_{96}$  означаетъ периметръ описаннаго 96-угольника. Подставивъ на мѣсто  $\frac{1}{2} p_{96}$  и  $a_{96}$  найденныя прежде числа и сдѣлавъ вычисленія, найдемъ:

$$\frac{1}{2} P_{96} = 3,1427146...$$

Полуокружность болѣе полупериметра вписаннаго, но меньше полупериметра описаннаго 96-угольника (257); поэтому она отличается отъ каждаго изъ этихъ полупериметровъ меньше, чѣмъ они разнятся между собою. Сравнивая два числа, най-

денныя для  $\frac{1}{2}P_{96}$  и  $\frac{1}{2}P_{96}$ ; замѣчаемъ, что у нихъ одинаковы цѣлыя, десятыя и сотыя доли; слѣд., разность между полупериметрами меньше  $\frac{1}{100}$ . Поэтому если положимъ, что  $\pi = 3,14$ , то сдѣлаемъ ошибку, меньшую 0,01.

Если подобнымъ образомъ продолжимъ вычисленіе до полученія полупериметра мн.-ка о 6144 сторонахъ, то получимъ число, точное до одной миллионной:

$$\pi = 3,141\ 592$$

Полезно также запомнить нѣсколько цифръ числа

$$\frac{1}{\pi} 0,318\ 309\ 886...$$

часто встрѣчающагося при вычисленіяхъ.

**261. Архимедово и Меціево отношенія.** *Архимедъ*, знаменитый Сиракузскій геометръ, жившій въ III вѣкѣ до Р. Хр., напелъ для  $\pi$  весьма простое число  $\frac{22}{7}$ , т.-е.  $3\frac{1}{7}$ . Это число нѣсколько болѣе  $\pi$  и разнится отъ него менѣе, чѣмъ на 2 тысячныхъ.

*Адрианъ Мецій*, голландскій геометръ XVI столѣтія, далъ для отношенія окружности къ діаметру число  $\frac{355}{113}$ , точное до одной миллионной \*); его легко запомнить по слѣдующему правилу: написавъ по 2 раза первыя три печетныя цифры

$$113 \mid 355$$

слѣдуетъ послѣднія три взять числителемъ, а первыя знаменателемъ.

Ученые позднѣйшаго времени, пользуясь упрощенными способами (которые указываются высшей математикой), вычислили  $\pi$  съ точностью, далеко превосходящею всякія практическія требованія (такъ, *Шенксъ* нашелъ 530 десятичныхъ знаковъ числа  $\pi$  \*\*).)

**262. Длина дуги въ  $n^\circ$ .** Такъ какъ длина всей окруж-

\*) Какъ разъясняетъ г. *Энштрель* (Стокгольмъ) въ № 94 „Вѣстника опытной физики и элементарной математики“, число это было найдено отцемъ *Адриана Меція*, математикомъ *Адрианомъ Антонисомъ*.

\*\*) Для запоминанія довольно длиннаго ряда цифръ, выражающихъ число  $\pi$ , можно пользоваться слѣдующимъ французскимъ двустишіемъ:

*Que j'aime à faire apprendre  
Un nombre utile aux hommes'*

Если написать въ рядъ числа буквъ, заключающихся въ каждомъ словѣ этой фразы, то получимъ для  $\pi$  число 3,1415926536, вѣрное до одной половины десятибилліонной.



ности есть  $2\pi R$ , то длина дуги въ  $1^\circ$  будетъ  $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ ; слѣд., длина  $s$  дуги, содержащей  $n^\circ$ , выразится такъ:

$$s = \frac{\pi R n}{180}$$

Если дуга выражена въ минутахъ ( $n'$ ) или секундахъ ( $n''$ ), то длина ея опредѣлится формулами:

$$s_1 = \frac{\pi R n'}{180.60} \quad s_{11} = \frac{\pi R n''}{180.60.60}$$

**263. Задача.** Вычислить съ точностью до 1 миллиметра радиусъ такой окружности, которой дуга, содержащая  $85^\circ 21' 42''$ , равна 0,452 метра.

Обрабавъ  $85^\circ 21' 42''$  въ секунды, получимъ число 307302". Изъ уравненія:

$$0,452 = \frac{\pi R \cdot 307302}{180.60.60}$$

находимъ:

$$R = \frac{0,452 \cdot 180.60.60}{\pi \cdot 307302} = 0,303 \text{ (метра)}$$

**264.** При доказательствѣ нижеслѣдующей теоремы мы будемъ оппываться на слѣдующихъ почти очевидныхъ истинахъ:

1<sup>о</sup>. Если переменная величина, измѣняясь, все увеличивается, но при этомъ остается меньше некоторой постоянной величины, то она имѣетъ предѣлъ.

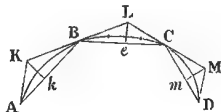
2<sup>о</sup>. Если переменная величина, измѣняясь, все уменьшается, но при этомъ остается больше некоторой постоянной величины, то она имѣетъ предѣлъ.

3<sup>о</sup>. Если разность двухъ переменныхъ величинъ стремится къ 0, и одна изъ этихъ величинъ имѣетъ предѣлъ, то другая имѣетъ тотъ же предѣлъ.

**265. Теорема.** Периметръ ломаной линіи, вписанной въ данную конечную кривую, стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда стороны ломаной стремятся къ 0.\*)

Если данная кривая не выпукла, мы можемъ разбить ее на части, изъ которыхъ каждая выпукла. Поэтому теорему достаточно доказать только для выпуклой кривой.

Пусть  $ABCD$  (черт. 188) есть какая-нибудь ломаная, вписанная въ выпуклую кривую  $AD$ . Проведемъ черезъ всѣ ея вершины касательныя до взаимнаго пересѣченія. Тогда получимъ описанную ломанную  $AKLM$ . Условимся называть такую описанную линію соотвѣствующею для вписанной ломаной  $ABCD$ .



Черт. 188

\*) Излагаемое доказательство взято (съ нѣкоторыми измѣненіями) изъ книги: „Éléments de géométrie, par Rouchelet Comberousse“, quatrième édition, 1888.

Доказательство наше будетъ состоять изъ трехъ частей.

1°. Пусть  $p$  означаетъ периметръ какой угодно вписанной, а  $P$  периметръ соответственной описанной линіи. Докажемъ, что разность  $P - p$  стремится къ 0, когда стороны вписанной линіи стремятся къ 0. Для этого предварительно найдемъ предѣлъ отношенія  $P : p$ . Изъ вершинъ описанной ломаной опустимъ перпендикуляры на стороны вписанной (черт. 188). Тогда:

$$P = AK + KB + BL + LC + CM + MD$$

$$p = Ak + kB + Bl + lC + Cm + mD$$

Изъ алгебры извѣстно\*), что величина дроби

$$\frac{AK + KB + BL + LC + CM + MD}{Ak + kB + Bl + lC + Cm + mD} = \frac{P}{p} \quad [1]$$

заключается между меньшею и большею изъ дробей:

$$\frac{AK}{Ak}, \frac{KB}{kB}, \frac{BL}{Bl}, \dots, \frac{MD}{mD} \quad [2]$$

Найдемъ предѣлъ, къ которому стремятся эти дроби. Когда стороны вписанной ломаной стремятся къ 0, стороны соответственной описанной линіи также, очевидно, стремятся къ 0; поэтому каждая изъ дробей ряда [2] представляется въ предѣлѣ подъ видомъ  $\frac{0}{0}$ . Чтобы раскрыть истинный смыслъ этой неопредѣленности, возьмемъ отдѣльно (черт. 189) какой-нибудь изъ прямоугольных тр.-ковъ чертежа 188-го, напр.,  $\triangle AKk$ . Продолживъ сторону  $Ak$ , отложимъ на пей какую-нибудь постоянную длину  $AS$  и построимъ  $\triangle ABS$ , подобный  $\triangle AKk$ . Тогда:

$$AK : Ak = AB : AS$$

Когда стороны вписанной ломаной стремятся къ 0, уголъ  $A$ , составленный касательною и хордою, стремится къ 0 (130, 245); слѣд., гипотенуза  $AB$  приближается какъ угодно близко къ равенству съ катетомъ  $AS$ , и потому отношеніе  $AB : AS$ , а слѣд. и отношеніе  $AK : Ak$ , стремятся къ 1. Такъ какъ это разсужденіе можно примѣнить ко всякому треугольнику чертежа 188-го, то, значитъ, каждая дробь изъ ряда [2] имѣетъ предѣломъ 1; слѣд., и дробь [1] имѣетъ тотъ же предѣлъ.

Доказавъ это, возьмемъ разность  $P - p$  и представимъ ее такъ:

$$P - p = p \left( \frac{P}{p} - 1 \right)$$

Отношеніе  $\frac{P}{p}$  стремится къ 1; слѣд., разность  $\frac{P}{p} - 1$  стремится къ 0. Влѣдствіе этого и произведеніе  $p \left( \frac{P}{p} - 1 \right)$  въ которомъ множимое величина конечная (такъ какъ периметръ  $p$  не можетъ сдѣлаться больше

\*) См., напр., „Элементарная алгебра, сост. А. Киселевъ“, второе изданіе, стр. 231.

периметра любой описанной лини), также стремится къ 0; значить, то же самое можно сказать о разности  $P - p$ .

2°. Докажемъ теперь, что периметръ вписанной ломаной стремится къ предѣлу при слѣдующемъ частномъ законѣ вписыванія. Концы данной кривой соединимъ хордою. Изъ середины этой хорды возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія съ кривою. Соединивъ точку пересѣченія съ концами хорды, получимъ первую ломаную о двухъ сторонахъ. Изъ середины ея сторонъ возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривою. Соединивъ точки пересѣченія съ соседними вершинами первой ломаной, получимъ вторую ломаную съ 4-мя сторонами. Возставивъ изъ середины сторонъ этой ломаной перпендикуляры до пересѣченія съ кривою и соединивъ полученные точки съ соседними вершинами второй ломаной, образуемъ третью ломаную съ 8-ю сторонами. Вообразимъ, что по этому закону мы строимъ неограниченный рядъ вписанныхъ ломаныхъ. Тогда периметръ этихъ линій будетъ *все увеличиваться*, оставаясь однако меньше периметра любой описанной лини; вслѣдствіе этого онъ стремится къ нѣкоторому предѣлу. Обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ  $L$ .

Тотъ же предѣлъ имѣетъ и периметръ *соответственной* описанной ломаной, такъ какъ, по доказанному, разность между этими периметрами стремится къ 0.

3°. Докажемъ, наконецъ, что къ тому же предѣлу  $L$  стремится периметръ вписанной ломаной, которой стороны уменьшаются *по какому угодно закону*.

Пусть  $p_1$  есть переменный периметръ такой вписанной лини, которой стороны стремятся къ 0 по произвольному закону, а  $p$  периметръ вписанной лини, образуемой по указанному выше частному закону; положимъ еще, что  $P_1$  и  $P$  будутъ периметры соответственныхъ описанныхъ линій. По доказанному въ части 1° этого изложенія разности:

$$P_1 - p_1 \text{ и } P - p$$

стремятся къ 0. Поэтому и сумма ихъ должна стремиться къ 0. Но эту сумму можно представить такъ:

$$(P_1 - p) + (P - p_1)$$

Такъ какъ  $P_1 > p$  и  $P > p_1$  (53), то обѣ разности, стоящія внутри скобокъ, положительны. Но сумма положительныхъ слагаемыхъ будетъ стремиться къ 0 только тогда, когда *каждое слагаемое* стремится къ 0; слѣд., разности  $P_1 - p$  и  $P - p_1$  стремятся къ 0. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{пред. } P_1 = \text{пред. } p \text{ и пред. } P = \text{пред. } p_1$$

$$\text{Но} \quad \text{пред. } p = \text{пред. } P = L$$

$$\text{Слѣд.} \quad \text{пред. } p_1 = \text{пред. } P_1 = \text{пред. } p = \text{пред. } P = L$$

т.-е. этотъ предѣлъ существуетъ и есть единственный для данной кривой.

## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

255. Доказать, что въ двухъ кругахъ отношеніе центральныхъ угловъ, соответствующихъ дугамъ, имѣющимъ одинаковую длину, равно обратному отношенію радіусовъ.

256. Какъ велика будетъ ошибка, если вѣсто полуокружности возьмемъ сумму стороны правильного вписаннаго треугольника и стороны вписаннаго квадрата?

257. На окружности взята точка  $A$  и черезъ нее проведены: діаметръ  $AB$ , сторона правильнаго вписаннаго 6-угольника  $AC$  и касательная  $MN$ . Изъ центра  $O$  опущенъ на  $AC$  перпендикуляръ и продолженъ до пересѣченія съ касательнаго въ точкѣ  $D$ . Отъ этой точки отложена по касательной (черезъ точку  $A$ ) прямая  $DE$ , равная 3 радіусамъ. Точка  $E$  соединена съ концомъ діаметра  $B$ . Определить, какъ велика погрѣбность, если прямую  $BE$  возьмемъ за длину полуокружности \*).

258. На діаметрѣ данной полуокружности построены двѣ равныя полуокружности и въ пространство, заключенное между тремя полуокружностями, вписанъ кругъ. Доказать, что діаметръ этого круга относится къ діаметру равныхъ полуокружностей, какъ 2:3.

259. Вычислить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дугу, равную радіусу.

260. Вычислить длину одного градуса земнаго экватора, принимая радіусъ земли въ 859 геогр. милъ.

## КНИГА V.

# ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

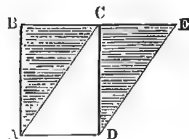
## ГЛАВА I.

### Площади многоугольниковъ.

**266. Опреѣленія.** Площадью нав. величина части плоскости, ограниченной со всѣхъ сторонъ линіями.

\*) Доказано, что посредствомъ циркуля и линейки нѣтъ возможности построить такую конечную прямую, которая въ точности равнялась бы длине окружности (задача о спрямленіи окружности). Однако есть нѣсколько способовъ для приближеннаго спрямленія. Въ задачахъ 256 и 257 указаны два изъ этихъ способовъ. Последній изъ нихъ, принадлежащій польскому іезуиту Кожанскому (1683), замѣчателенъ тѣмъ, что можетъ быть выполненъ однимъ раствореніемъ циркуля.

*Равныя фигуры*, т.-е. такія, которыя совмѣщаются при наложеніи, имѣютъ и равныя площади. Но и у неравныхъ фигуръ площади могутъ быть равны. Напр., если прямоугольникъ  $ABCD$  раздѣлимъ пополамъ діагональю  $AC$  и перенесемъ тр.-къ  $ABC$  въ положеніе  $DCE$ , то получимъ параллелограммъ  $ACED$ , котораго площадь, очевидно, равна площади прямоугольника.



Черт. 191

Двѣ фигуры, имѣющія равныя площади, наз. *равновеликими*.

**261. Единица площади.** За единицу площадей берутъ площадь такого квадрата, у котораго сторона равна линейной единицѣ. Такъ, употребительны квадратъ, квадратъ метра и т. п.

Измѣреніе площади только въ рѣдкихъ случаяхъ можетъ быть выполнено непосредственнымъ наложеніемъ квадратной единицы. Большею частію площади приходится измѣрять косвенно, посредствомъ измѣренія нѣкоторыхъ линій фигуры.

**262. Основаніе и высота.** Условимся одну изъ сторонъ треугольника или параллелограмма называть *основаніемъ* этихъ фигуръ, а перпендикуляръ, опущенный на эту сторону изъ вершины тр.-ка или изъ какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма будемъ называть *высотой*.

Въ прямоугольникѣ за высоту можно взять сторону, перпендикулярную къ той, которая принята за основаніе.

Въ трапеціи основаніями называютъ обѣ параллельныя стороны, а высотой общій перпендикуляръ между ними.

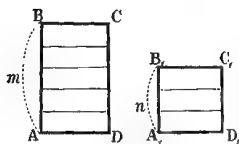
Основаніе и высота прямоугольника наз. его *измѣреніями*.

**263. Лемма 1<sup>а</sup>.** Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся, какъ ихъ высоты.

Пусть  $AC$  и  $A_1C_1$  (черт. 192) будутъ два прямоугольника, у которыхъ основанія  $AD$  и  $A_1D_1$  равны; требуется доказать, что площади такихъ прямоугольниковъ относятся, какъ высоты  $AB$  и  $A_1B_1$ .

При доказательствѣ рассмотримъ особо два случая.

1°. *Высоты соизмеримы.* Найдя общую мѣру высотъ,



Черт. 192

отложимъ ее на каждой изъ нихъ столько разъ, сколько можно. Пусть общая мѣра содержится  $m$  разъ въ  $AB$  и  $n$  разъ въ  $A_1B_1$ . Проведемъ черезъ точки дѣленія прямыя, параллельныя основаніямъ. Тогда площадь  $ABCD$  раздѣлится на  $m$  равныхъ частей, а площ.

$A_1B_1C_1D_1$  на  $n$  такихъ же частей. Поэтому

$$\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1} = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{m}{n}$$

Слѣд.:

$$\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

2°. *Высоты несоизмеримы.* Раздѣлимъ  $A_1B_1$  на  $n$  равныхъ частей и одну часть отложимъ на  $AB$  столько разъ, сколько можно. Пусть она содержится въ  $AB$  болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$  разъ. Черезъ точки дѣленія проведемъ прямыя, параллельныя основаніямъ. Тогда площадь  $A_1B_1C_1D_1$  раздѣлится на  $n$  такихъ равныхъ частей, какія въ площ.  $ABCD$  содержится болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$  разъ. Поэтому:

$$\text{прибл. отн. } \frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1} = \frac{m}{n} \left( \text{до } \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{и прибл. отн. } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{m}{n} \left( \text{до } \frac{1}{n} \right)$$

Такимъ образомъ, приближенныя отношенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою, точностью, оказываются равными; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмеримыхъ отношеній (144).

**230. Слѣдствіе.** Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся, какъ ихъ основанія, потому что въ прямоугольникахъ основанія могутъ быть приняты за высоты, а высоты за основанія.

**231. Лемма 2°. Площади двухъ прямоугольниковъ относятся, какъ произведеніи основаній на высоты.**

Пусть  $P$  и  $Q$  будут два прямоугольника,  $b$  и  $b_1$  — их основания,  $h$  и  $h_1$  — высоты; требуется доказать, что

$$P : Q = bh : b_1 h_1$$



Черт. 193.

Возьмемъ вспомогательный прямоугольникъ  $R$ , у котораго основание равно  $b$ , а высота  $h_1$ . Тогда, по предыдущей леммѣ, будемъ имѣть:

$$\frac{P}{R} = \frac{h}{h_1} \text{ и } \frac{R}{Q} = \frac{b}{b_1}$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ (по сокращеніи на  $R$ ):

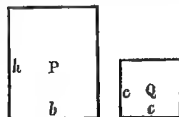
$$\frac{P}{Q} = \frac{bh}{b_1 h_1}$$

**212. Теорема.** Число, выражающее площадь прямоугольника въ квадратныхъ единицахъ, равно произведенію числа, выражающаго основание и высоту его въ соответствующихъ линейныхъ единицахъ.

Это сокращенно выражаютъ такъ: площадь прямоугольника равна произведенію основанія на высоту.

Доказываемую теорему можно рассматривать, какъ слѣдствіе предыдущей леммы. Дѣйствительно, если  $P$  есть данный прямоугольникъ, а  $Q$  квадратная единица, то, называя основание и высоту первого  $b$  и  $h$ , а основание и высоту второго  $c$ , будемъ имѣть:

$$\frac{P}{Q} = \frac{bh}{cc}$$



что можетъ быть написано такъ:

Черт. 194

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{c} \cdot \frac{h}{c}$$

Это равенство и есть то, которое требовалось доказать, такъ какъ

отношеніе  $\frac{P}{Q}$  есть число, выражающее площадь прямоугольника въ квадратныхъ единицахъ, а отношенія  $\frac{b}{c}$  и  $\frac{h}{c}$  суть числа, выражающія его основаніе и высоту въ соотвѣствующихъ линейныхъ единицахъ.

Полагая  $Q=1$  и  $c=1$ , получимъ:

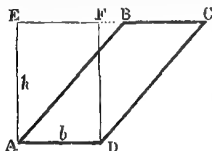
$$P=bh$$

гдѣ  $P$ ,  $b$  и  $h$  суть числа, выражающія площадь, основаніе и высоту прямоугольника въ соотвѣствующихъ единицахъ.

**§ 33. Слѣдствіе.** Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

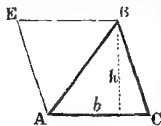
**§ 34.** Изъ послѣдующихъ теоремахъ мы будемъ сокращенно говорить: „площадь равна произведенію такихъ-то линій“, разумѣя подъ этимъ, что число, выражающее площадь въ квадр. единицахъ, равно произведенію чиселъ, выражающихъ такіа-то линіи въ соотвѣствующихъ линейныхъ единицахъ.

**§ 35. Теорема.** Площадь параллелограмма ( $ABCD$ , черт. 195) равна произведенію основанія на высоту.



Черт. 195

На основаніи  $AD$  построимъ прямоугольникъ  $AEFD$ , у котораго высота такая же, какъ и у параллелограмма. Докажемъ, что  $ABCD$  равновеликъ  $AEFD$ . Параллелограммъ  $ABCD$  получится, если изъ четырехугольника  $AECD$  отдѣлимъ тр.-къ  $AEB$ ; прямоугольникъ  $AEFD$  получится, если изъ того же четырехугольника  $AECD$  отдѣлимъ тр.-къ  $DFC$ . Отдѣляемые тр.-ка равны, потому что они прямоугольные и  $AE=DF$ ,  $AB=CD$  (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ). Изъ этого слѣдуетъ, что  $ABCD$  равновеликъ  $AEFD$ . Но площадь  $AEFD$  равна  $bh$ ; слѣд., и площадь  $ABCD$  равна  $bh$ .



Черт. 196

**§ 36. Теорема.** Площадь треугольника ( $ABC$ , черт. 196) равна половинѣ произведенія основанія на высоту.

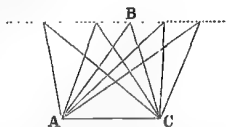


Проведемъ  $BE \parallel AC$  и  $AE \parallel BC$ . Тогда получимъ параллелограмъ  $AEBC$ , котораго площадь, по доказанному, равна произведению  $bh$ . Но площадь  $ABC$  составляетъ половину площади  $AEBC$ ; слѣд.

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} bh$$

**257. Слѣдствія.** 1°. Треугольники съ равными основаниями и равными высотами равновелики.

Если, напр., вершину  $B$  тр.-ка  $ABC$  будемъ перемѣщать по прямой, параллельной основанію  $AC$ , а основаніе оставимъ то же самое, то площадь тр.-ка не измѣнится.



Черт. 197

2°. Площадь прямоугольнаго треугольника равна половинѣ произведенія его катетовъ, потому что одинъ катетъ можно взять за основаніе, а другой за высоту.

3°. Площади треугольниковъ относятся, какъ произведенія оснований на высоты.

**258. Теорема.** Площадь  $S$  треугольника въ зависимости отъ его сторонъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражается формулой:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

гдѣ  $p$  есть полупериметръ треугольника, т.-е.

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Пусть высота тр.-ка  $ABC$ , опущенная на сторону  $a$ , есть  $h_a$ . Тогда:

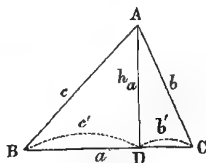
$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

Чтобы найти высоту  $h_a$ , возьмемъ уравненіе (208):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

я опредѣлимъ изъ него отрѣзокъ  $c'$ :

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$



Черт. 198

Теперь изъ треугольника  $ABD$  находимъ:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}$$

Преобразуемъ подкоренную величину такъ:

$$\begin{aligned} (2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= [(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2][b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)] \\ &= [(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2] \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c) \end{aligned}$$

Если положимъ, что  $a+b+c=2p$ , то

$$a+c-b = (a+b+c) - 2b = 2p - 2b = 2(p-b)$$

Подобно этому:

$$b+a-c = 2(p-c)$$

$$b+c-a = 2(p-a)$$

Теперь подкоренная величина представится такъ:

$$16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Слѣд.

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

и

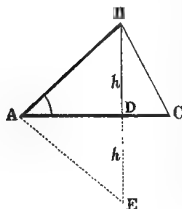
$$S = \frac{1}{2} ah_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Частный случай.** Площадь *равносторонняго* треугольника со стороною  $a$  выразится формулой:

$$S = \sqrt{\frac{3}{2} a \left(\frac{3}{2} a - a\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2} a \left(\frac{1}{2} a\right)^3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

**239. Задача.** Найти площадь треугольника  $ABC$  по двумъ сторонамъ  $AB$  и  $AC$  и углу  $A$  между ними.

Геометрически эта задача рѣшается только для некоторыхъ частныхъ

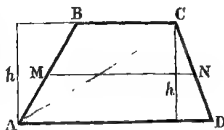


Черт. 199.

значений угла  $A$ . Положимъ, напр., что  $A=18^\circ$ . Тогда можно найти  $h$  въ зависимости отъ стороны  $AB$  такимъ образомъ. Продолживъ  $BD$  на расстояние  $DE=BD$ , соединимъ  $E$  съ  $A$ . Тогда въ равнобедренномъ тр.-кѣ  $ABE$  уголъ  $BAE$  будетъ равенъ  $36^\circ$ . Изъ этого заключаемъ, что  $BE$ , т.-е. двойная высота, есть сторона правильного 10-угольника, вписаннаго въ кругъ котораго радиусъ есть  $AB$ . Поэтому  $DE$  найдется по формулѣ, опредѣляющей сторону прав. вписан. 10-угольника (236). Опредѣливъ высоту, найдемъ затѣмъ площадь тр.-ка по формулѣ  $S = \frac{1}{2} bh$ .

**280. Теорема.** *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.*

Проведя въ трапеции  $ABCD$  диагональ  $AC$ , мы можемъ разсматривать ея площадь, какъ сумму площадей двухъ тр.-ковъ  $ACD$  и  $ABC$ . Поэтому



Черт. 200

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} AD \cdot h +$$

$$+ \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} (AD + BC) h$$

**281. Слѣдствіе.** Проведя въ трапеции среднюю линію  $MN$ , будемъ имѣть (103):

$$MN = \frac{1}{2} (AD + BC)$$

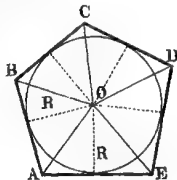
Поэтому:

$$\text{пл. } ABCD = MN \cdot h$$

т.-е. площадь трапеции равна произведенію средней линіи на высоту.

**282. Теорема.** *Площадь описаннаго многоугольника равна произведенію периметра на половину апогея.*

Соединивъ центр  $O$  со всѣми вершинами описаннаго многоугольника, мы раздѣлимъ его на треугольники, въ которыхъ за основанія можно брать стороны многоугольника, а за высоту — радиусъ круга. Обозначивъ этотъ радиусъ черезъ  $R$ , будемъ имѣть:



Черт. 201

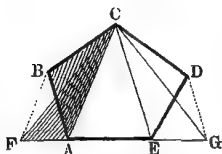
$$\text{пл. } ABO = AB \cdot \frac{1}{2} R;$$

$$\text{пл. } AOE = AE \cdot \frac{1}{2} R \text{ и т. д.}$$

$$\text{Слѣд. пл. } ABCDE = (AB + BC + CD + DE + EF) \cdot \frac{1}{2} R.$$

**283. Слѣдствіе.** *Площадь правильнаго многоугольника равна произведенію периметра на половину апогея, потому что всякій прав. многоугольникъ можно разсматривать, какъ описанный около круга, у котораго радиусъ есть апогея.*

**284. Задача.** Превратить многоугольник  $ABCDE$  въ равновеликій треугольникъ.



Черт. 202

Черезъ вершину  $B$  проведемъ  $BF \parallel AC$  до пересѣченія съ продолженіемъ  $EA$ . Точку  $F$  соединимъ съ  $C$ . Тр.-ки  $OBA$  и  $CFA$  равновелики, такъ какъ у нихъ общее основаніе  $AC$ , а вершины  $B$  и  $F$  лежатъ на прямой, параллельной основанію (277). Если отъ даннаго многоугольника отдѣлимъ

тр.-къ  $OBA$  и вмѣсто него приложимъ тр.-къ  $CFA$ , то величина площади не измѣнится; слѣд., данный пятиугольникъ равновеликъ четырехугольнику  $FCDE$ . Такимъ же приемомъ можно превратить этотъ четырехугольникъ въ равновеликій треугольникъ (напр.  $FCG$ ).

**285. Задача.** Превратить многоугольникъ въ равновеликій квадратъ.

Сначала превращаютъ многоугольникъ въ равновеликій треугольникъ, а затѣмъ этотъ треугольникъ въ квадратъ. Пусть основаніе и высота треугольника будутъ  $b$  и  $h$ , а сторона искомаго квадрата  $x$ . Тогда площадь перваго равна  $\frac{1}{2}bh$ , а втораго  $x^2$ ; слѣд.

$$\frac{1}{2}bh = x^2; \text{ откуда } \frac{1}{2}b : x = x : h$$

т.-е.  $x$  есть средняя пропорціанальная между  $\frac{1}{2}b$  и  $h$ . Такимъ образомъ, сторону квадрата можно построить способомъ, указаннымъ равнѣе (203) для нахождения средней пропорціанальной.

Замѣтимъ, что предварительное превращеніе даннаго многоугольника въ треугольникъ не всегда необходимо. Напр., если рѣчь идетъ о превращеніи въ квадратъ данной трапеціи, то достаточно найти среднюю пропорціанальную между высотой трапеціи и ея среднею линіею и на полученной прямой построить квадратъ.

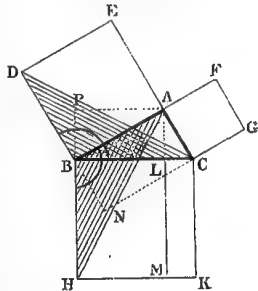
## ГЛАВА II.

### Теорема Пифагора и основанная на ней задачи.

**286. Теорема.** Сумма квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равновелика квадрату, построенному на гипотенузе.

Это предположеніе, известное подъ названіемъ **теоремы Пифагора** (греческаго философа, жившаго въ VI вѣкѣ до Р. Хр.), имѣеть многочисленныя доказательства. Приведемъ простѣйшія изъ нихъ.

*Первое доказательство.* Пусть  $ABC$  будетъ прямоугольный треугольникъ, а  $BDEA$ ,  $AFGC$  и  $BCKH$  квадраты, построенные на его катетахъ и гипотенузѣ; требуется доказать, что сумма двухъ первыхъ квадратовъ равновелика третьему квадрату. — Проведемъ  $AM \perp BC$ . Тогда квадратъ  $BCKH$  раздѣлится на два прямоугольника. Докажемъ, что  $пря. BLMH$  равновеликъ квадрату  $BDEA$ , а  $прямоуг. LCKM$  равновеликъ квадрату  $AFGC$ . Проведемъ вспомогательныя  $DC$  и  $AN$ . Тр.-къ  $DCB$ , имѣющій основаніе  $BD$ , общее съ квадратомъ  $BDEA$ , и высоту  $CN$ , равную высотѣ  $AB$  этого квадрата, равновеликъ половинѣ его. Тр.-къ  $ABH$ , имѣющій основаніе  $BH$ , общее съ прямоугольникомъ  $BLMH$ , и высоту  $AP$ , равную высотѣ  $BL$  этого прямоугольника, равновеликъ половинѣ его. Сравнивая эти два треугольника между собою, находимъ, что у нихъ  $BD = BA$  и  $BC = BH$  (какъ стороны квадрата); сверхъ того  $\angle DBC = \angle ABH$ , такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ состоитъ изъ общей части  $ABC$  и прямого угла. Значитъ, тр.-ки  $BDC$  и  $ABH$  равны. Отсюда слѣдуетъ, что прямоугольникъ  $BLMH$  равновеликъ квадрату  $BDEA$ .



Черт. 204

Соединивъ  $G$  съ  $B$  и  $A$  съ  $K$ , мы совершенно такъ же докажемъ, что прямоугольникъ  $LCKM$  равновеликъ квадрату  $AFGC$ . Отсюда слѣдуетъ, что  $BCKM$  равновеликъ суммѣ  $BDEA$  и  $AFGC$ .

*Второе доказательство.* Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  будутъ числа, выражающія гипотенузу и катеты прямоугольнаго треугольника въ одной и той же линейной единицѣ. Тогда, какъ мы видѣли раньше (204):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

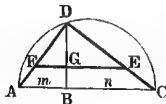
Но  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  суть числа, измѣряющія площади квадратовъ, которыхъ стороны суть  $a$ ,  $b$  и  $c$ : слѣд., написанное равенство выражаетъ, что квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

**287. Задачи.** Построить квадратъ, равновеликій: 1°, суммѣ, 2°, разности двухъ данныхъ квадратовъ.

1°. Строимъ прямоугольный треугольникъ, у котораго катетами были бы стороны данныхъ квадратовъ. Квадратъ, построенный на гипотенузѣ этого треугольника, будетъ равновеликъ суммѣ данныхъ квадратовъ.

2°. Строимъ прямоугол. треугольникъ, у котораго гипотенузой была бы сторона большаго изъ данныхъ квадратовъ, а катетомъ сторона меньшаго квадрата. Квадратъ, построенный на другомъ катетѣ этого треугольника, будетъ равновеликъ разности данныхъ квадратовъ.

**288. Задача.** Построить квадратъ, котораго площадь относилась бы къ площади даннаго квадрата, какъ  $m : n$ .



Черт. 205

На неопредѣленной прямой откладываемъ  $AB = m$  и  $BC = n$ , и на  $AC$ , какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность. Изъ точки  $B$  возстановляемъ перпендикуляръ  $BD$  до пересѣченія съ окружностью. Соединивъ  $D$  съ  $A$  и  $C$ , получимъ прямоугольный тр.-къ, у котораго (206):

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n$$

Отложимъ теперь на одномъ изъ катетовъ этого треуголь-

ника, напр. на  $DC$ , отрезокъ  $DE$ , равный сторонъ даннаго квадрата, и проведемъ  $EF \parallel CA$ . Прямая  $DF$  будетъ стороною искомаго квадрата потому что

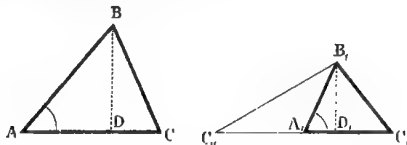
$$DF:DE=AD:DC$$

и слѣд.  $DF^2:DE^2=AD^2:DC^2=m:n$

### ГЛАВА III.

## Отношеніе площадей подобныхъ фигуръ.

**289. Теорема.** *Площади двухъ треугольниковъ, содержащихъ по равному углу, относятся, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ эти углы.*



Черт. 206

Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будутъ два тр.-ка, у которыхъ  $A=A_1$ . Проведемъ высоты  $BD$  и  $B_1D_1$ , будемъ имѣть:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1}$$

Тр.-ки  $ABD$  и  $A_1B_1D_1$  подобны ( $A=A_1$  и  $D=D_1$ ); поэтому отношеніе  $BD:B_1D_1$  равно отношенію  $AB:A_1B_1$ ; замѣнивъ первое вторымъ, получимъ:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$$

**290. Замѣчаніе.** Предлагаемъ самимъ учащимся доказать, что если у двухъ треугольниковъ  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (черт. 206) углы  $A$  и  $A_1$  составляютъ въ суммѣ  $2d$ , то площади такихъ тр.-ковъ также относятся, какъ произведенія сторонъ, заключающихъ углы  $A$  и  $A_1$ .

**291.** Площади подобных треугольников или многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторонъ.

1°. Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (черт. 206) будутъ два подобные треугольника, у которыхъ  $A=A_1$ ,  $B=B_1$  и  $C=C_1$ . Применяя къ нимъ предыдущую теорему, получимъ:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} \quad [1]$$

Но изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ:

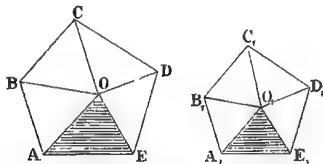
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad [2]$$

Поэтому въ равенствѣ [1] мы можемъ каждое изъ отношеній

$\frac{AB}{A_1B_1}$  и  $\frac{AC}{A_1C_1}$  замѣнить любымъ отношеніемъ ряда [2]. Слѣд.:

$$\begin{aligned} \frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1} &= \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \\ &= \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2} \end{aligned}$$

2°. Пусть  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  будутъ два подобные многоугольника. Ихъ можно, какъ мы видѣли (186), разложить на одинаковое число подобныхъ и одинаково располо-



Черт. 207

женныхъ тр.-ковъ. Пусть эти тр.-ки будутъ:  $ABO$  и  $A_1B_1O_1$ ,  $AOE$  и  $A_1O_1E_1$  и т. д. Согласно доказанному въ первой части этой теоремы, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\text{пл. } AOB}{\text{пл. } A_1O_1B_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2; \quad \frac{\text{пл. } BOC}{\text{пл. } B_1O_1C_1} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ и т. д.}$$



Но изъ подобія многоугольниковъ слѣдуетъ:

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 = \dots$$

Значить:  $\frac{\text{пл. } \triangle AOB}{\text{пл. } \triangle A_1O_1B_1} = \frac{\text{пл. } \triangle BOC}{\text{пл. } \triangle B_1O_1C_1} = \frac{\text{пл. } \triangle COD}{\text{пл. } \triangle C_1O_1D_1} = \dots$

Откуда:  $\frac{\text{пл. } \triangle AOB + \text{пл. } \triangle BOC + \text{пл. } \triangle COD + \dots}{\text{пл. } \triangle A_1O_1B_1 + \text{пл. } \triangle B_1O_1C_1 + \text{пл. } \triangle C_1O_1D_1 + \dots} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}$

**292. Слѣдствіе.** Площади правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся, какъ квадраты сторонъ, или квадраты радиусовъ, или квадраты апотемъ (231).

**293. Задача.** Раздѣлитъ данный треугольникъ на  $n$  равновеликихъ частей прямыми, параллельными одной его сторонъ.

Пусть, напр., требуется раздѣлить тр-къ  $ABC$  на 3 равновеликія части прямыми, параллельными основанію  $AC$ . Предположимъ, что задача рѣшена, и искомыя прямыя будутъ  $DE$  и  $FG$ . Очевидно, что если мы найдемъ отрѣзки  $BE$  и  $BG$ , то затѣмъ опредѣлятся и прямыя  $DE$  и  $FG$ . Тр-ки  $BDE$ ,  $BFG$  и  $BAC$  подобны; поэтому:

$$\frac{\text{пл. } \triangle BDE}{\text{пл. } \triangle BAC} = \frac{BE^2}{BC^2} \quad \text{и} \quad \frac{\text{пл. } \triangle BFG}{\text{пл. } \triangle BAC} = \frac{BG^2}{BC^2}$$

Но изъ требованій задачи видно, что:

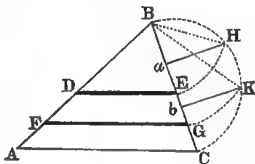
$$\frac{\text{пл. } \triangle BDE}{\text{пл. } \triangle BAC} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\text{пл. } \triangle BFG}{\text{пл. } \triangle BAC} = \frac{2}{3}$$

Слѣд.:  $\frac{BE^2}{BC^2} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{BG^2}{BC^2} = \frac{2}{3}$

Откуда:  $BE = \sqrt{\frac{1}{3}BC^2} = \sqrt{\frac{1}{3}BC \cdot BC}$

и  $BG = \sqrt{\frac{2}{3}BC^2} = \sqrt{\frac{2}{3}BC \cdot BC}$

Изъ этихъ формулъ видимъ, что  $BE$  есть средняя пропорціональная между  $BC$  и  $\frac{1}{3}BC$ , а  $BG$  есть средняя пропорціональная между  $BC$  и  $\frac{2}{3}BC$  (224, 4). Поэтому построеніе



Черт. 208

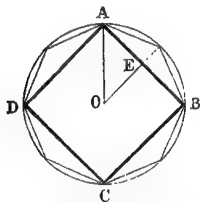
можно выполнить так: раздѣлимъ  $BC$  на три равныя части въ точкахъ  $a$  и  $b$ ; опишемъ на  $BC$  полуокружность; изъ  $a$  и  $b$  возставимъ къ  $BC$  перпендикуляры  $aH$  и  $bK$ . Хорды  $BH$  и  $BK$  будутъ искомыми средними пропорціональными: первая между всёмъ діаметромъ  $BC$  и его третьею частью  $Ba$ , вторая между  $BC$  и  $Bb$ , т.-е. между  $BC$  и  $\frac{2}{3}BC$  (202). Остается отложить эти хорды на  $BC$  отъ точки  $B$ ; тогда получимъ точки  $E$  и  $G$ .

Подобнымъ образомъ можно раздѣлить тр.-къ на какое угодно иное число равновеликихъ частей.

## ГЛАВА IV.

### Площадь круга и его частей.

**294. Лемма 1.** При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ правильнаго многоугольника, описаннаго въ окружность, разность между радіусомъ и апофемой этого многоугольника стремится къ нулю.



Черт. 209

Пусть  $ABCD$  будетъ какой-нибудь правильнѣйшій впис. многоугольникъ,  $OA$  радіусъ и  $OE$  апогема. Изъ тр.-ка  $OAE$  находимъ (50):

$$OA - OE < AE$$

$$\text{или} \quad OA - OE < \frac{1}{2} AB$$

т.-е. разность между радіусомъ и апофемой меньше половины стороны правильнаго многоугольника. Но при неограниченномъ удвоеніи числа сто-

ронъ прав. впис. многоугольника каждая сторона его, очевидно, стремится къ нулю; поѣтому разность между радіусомъ и апофемой, и подавно, стремится къ нулю.

**295. Лемма 2.** Площадь круга есть общій предѣлъ площадей правильныхъ описанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ сторонъ.

Внишемъ въ данный кругъ и опишемъ около него по какому-нибудь правильному одноименному многоугольнику (напр., шестиугольнику).

Пусть  $K$ ,  $Q$  и  $q$  будутъ соотвѣственно площади круга, описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ. Изъ чертежа мы непосредственно видимъ, что

$$Q > K \text{ и } K > q$$

Когда станемъ удваивать число сторонъ обоихъ многоугольниковъ, площади ихъ  $Q$  и  $q$  сдѣлаются величинами переменными (причемъ очевидно, что  $Q$  будетъ уменьшаться, а  $q$  увеличиваться). Мы должны доказать, что постоянная величина  $K$  будетъ при этомъ служить общимъ предѣломъ для  $Q$  и  $q$ ; другими словами, мы должны доказать, что каждая изъ разностей:

$$Q - K \text{ и } K - q$$

стремится къ нулю. Для этого возьмемъ третью, вспомогательную, разность

$$Q - q$$

которая, очевидно, больше каждой изъ двухъ первыхъ разностей, и докажемъ, что даже и эта, большая, разность стремится къ нулю. Обозначивъ апогеи описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ черезъ  $R$  и  $a$ , будемъ имѣть (292):

$$\frac{Q}{q} = \frac{R^2}{a^2}$$

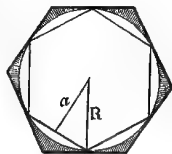
Составимъ изъ этой пропорціи производную (разность членовъ перваго отношенія относится такъ къ предыдущему члену этого отношенія, какъ....):

$$\frac{Q - q}{Q} = \frac{R^2 - a^2}{R^2}$$

Откуда:  $(Q - q) R^2 = Q (R^2 - a^2)$

или  $(Q - q) R^2 = Q (R + a) (R - a)$

Такъ какъ при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ



Черт. 210

многоугольниковъ разность  $R - a$ , по доказанному въ предыдущей леммѣ, стремится къ нулю, а сомножители  $Q$  и  $R + a$  не увеличиваются безпредѣльно, то правая часть послѣднего равенства (а слѣд. и лѣвая часть) стремится къ нулю. Но произведение  $(Q - q) R^2$  можетъ стремиться къ нулю только тогда, когда сомножитель  $Q - q$  стремится къ нулю (такъ какъ другой сомножитель  $R^2$  есть число постоянное). Если же разность  $Q - q$  стремится къ нулю, то, и подавно, то же самое можно сказать о меньшихъ разностяхъ  $Q - K$  и  $K - q$ . Изъ этого слѣдуетъ, что

$$K = \text{пред. } Q = \text{пред. } q.$$

**296. Теорема.** *Площадь круга равна произведенію длины окружности на половину радіуса.*

Пусть  $R$ ,  $K$  и  $C$  означаютъ радіусъ, площадь и длину данной окружности, а  $Q$  и  $P$  — площадь и периметръ какого-нибудь правильнаго описаннаго многоугольника. Тогда можемъ написать (283):

$$Q = P \cdot \frac{1}{2} R \quad [1]$$

Вообразимъ теперь, что число сторонъ описаннаго многоугольника неограниченно удваивается. Тогда величины  $Q$  и  $P$  сдѣлаются переменными, стремящимися къ предѣламъ: первая къ площади круга  $K$ , вторая — къ длинѣ окружности  $C$ . Такъ какъ равенство [1] остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ  $Q$  и  $P$ , то оно должно остаться вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто переменныхъ подставимъ ихъ предѣлы (251) значить:

$$K = C \cdot \frac{1}{2} R$$

Подставивъ на мѣсто  $C$  выраженіе  $2\pi R$  (262, 2°), получимъ:

$$K = \pi R^2$$

т.-е. *площадь круга равна произведенію квадрата радіуса на отношеніе окружности къ діаметру.*

**Слѣдствіе.** *Площади круговъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.*

Дѣйствительно, если  $K$  и  $K_1$  будутъ площади двухъ круговъ, а  $R$  и  $R_1$  ихъ радіусы, то

$$K = \pi R^2 \text{ и } K_1 = \pi R_1^2$$

Откуда: 
$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}$$

**297. Задача 1<sup>а</sup>.** Вычислить площадь круга, окружность котораго равна 2 метрамъ.

Для этого предварительно найдемъ радіусъ  $R$  изъ уравненія:

$$2\pi R = 2; \text{ откуда } R = \frac{1}{\pi}$$

Затѣмъ опредѣляемъ площадь круга:

$$K = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0,3183 \text{ квадр. метра.}$$

**Задача 2<sup>а</sup>.** Построить квадратъ, равновеликій данному кругу.

Эта задача, извѣстная подъ названіемъ *квадратуры круга*, не можетъ быть точно рѣшена при помощи циркуля и линейки. Дѣйствительно, если обозначимъ черезъ  $x$  сторону искомаго квадрата, а черезъ  $R$  радіусъ круга, то получимъ уравненіе:

$$x^2 = \pi R^2; \text{ откуда: } \pi R : x = x : R.$$

т.-е.  $x$  есть средняя пропорціанальная между полуокружностью и радіусомъ. Но доказано, что помощью циркуля и линейки нельзя построить прямую, которая въ точности равнялась бы длинѣ полуокружности (см. выноски къ задачѣ № 257); слѣд., нельзя въ точности рѣшить задачу о превращеніи круга въ квадратъ. Приближенное же рѣшеніе можно выполнить, если предварительно найти приближенную длину полуокружности и затѣмъ построить среднюю пропорціанальную между этою длиною и радіусомъ.

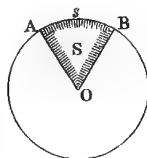
**298. Теорема.** Площадь сектора равна произведенію его дуги на половину радіуса.

Пусть дуга  $AB$  сектора  $AOB$  содержитъ  $n^\circ$ . Очевидно, что площадь сектора, котораго дуга содержитъ  $1^\circ$ , равна

$$\frac{\pi R^2}{360}$$

Слѣд., площадь  $S$  сектора котораго дуга содержитъ  $n^\circ$ , равна

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R}{180} \cdot \frac{R}{2}$$

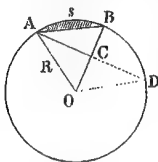


Черт. 211

Но  $\frac{R\pi}{180}$  выражаетъ длину дуги  $AB$ . Обозначивъ ее черезъ  $s$ , получимъ:

$$S = s \cdot \frac{R}{2}$$

**299. Задача.** Вычислить площадь сегмента, зная радиусъ круга и число градусовъ, заключающееся въ дугъ сегмента.



Черт. 212

Чтобы получить площадь сегмента  $ASB$ , достаточно изъ площади сектора  $AOB$  вычесть площадь тр.-ка  $AOB$ . Проведа  $AC \perp OB$ , будемъ имѣть:

$$\text{площадь сектора} = \frac{1}{2} R s$$

$$\text{площадь тр.-ка} = \frac{1}{2} OB \cdot AC = \frac{1}{2} R \cdot AC$$

$$\text{Слѣд. площ. сегмента} = \frac{1}{2} R (s - AC).$$

Таимъ образомъ вопросъ сводится къ вычисленію высоты  $AC$ . Геометрически ее можно найти только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ слѣдующимъ способомъ.

Продолживъ  $AC$  до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ  $D$ , мы увидимъ, что  $AC = CD$  и  $\frown AB = \frown BD$ ; значитъ,  $AC$  есть половина хорды, стягивающей дугу, вдвое большую дуги сегмента. Отсюда заключаемъ, что если хорда, стягивающая двойную дугу, будетъ сторона такого правильного вписаннаго многоугольника, для котораго мы знаемъ формулу его стороны, то высота  $AC$  опредѣлится геометрически. Напр., пусть дуга сегмента содержитъ  $60^\circ$ . Тогда  $AD$  есть сторона правильного вписаннаго треугольника; значитъ,  $AC = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$ . Дуга  $AB$  въ этомъ случаѣ равна  $\frac{1}{3}$  окружности, т.-е.  $\frac{1}{3}\pi R$ ; поэтому:

$$\text{пл. сегмента} = \frac{1}{2} R \left( \frac{\pi R}{3} - \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{12} R^2 (2\pi - 3\sqrt{3})$$

**300. Теорема.** Сумма площадей подобныхъ многоугольниковъ (или круговъ), построенныхъ на катетахъ прямоугельнаго треугольника, равна площади подобнаго многоугольника (или круга), построеннаго на гипотенузѣ, если катеты и гипотенуза служатъ сходственными сторонами этихъ многоугольниковъ (или диаметрами круговъ).

Пусть  $Q$ ,  $R$  и  $S$  будутъ площади подобныхъ фигуръ (или

круговъ), построенныхъ на катетахъ и гипотенузѣ прямоугольнаго тр.-ка  $ABC$ . Тогда (292, 296. слѣдствіе).

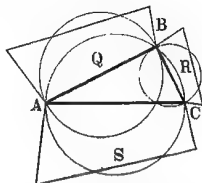
$$\frac{Q}{S} = \frac{AB^2}{AC^2} \quad \frac{R}{S} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ:

$$\frac{Q + R}{S} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$$

Но  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  (204); поэтому:

$$Q + R = S$$

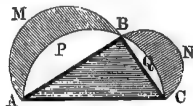


Черт. 213

**301. Слѣдствіе.** Если на сторонахъ прямоугольнаго треугольника  $ABC$  (черт. 214) построимъ полукруги, расположенные въ одну сторону, то сумма образованныхъ при этомъ фигуръ  $AMBP$  и  $BNCQ$  равна площади треугольника.

Дѣйствительно, сумма полукруговъ, построенныхъ на катетахъ, равновелика полукругу, построенному на гипотенузѣ; если же отъ обѣихъ частей этого равенства отнимемъ сумму сегментовъ  $APB$  и  $BQC$ , то получимъ:

$$AMBP + BNCQ = ABC$$



Черт. 214

Фигуры  $AMBP$  и  $BNCQ$  называемъ Гипократовыхъ луночекъ.

Когда треугольникъ равнобедренный, то обѣ луночки одинаковы и каждая изъ нихъ равновелика половинѣ треугольника.

## ГЛАВА V.

### Соотношеніе между сторонами треугольника и радіусами вписаннаго и описаннаго круговъ.

**302.** Для радіуса  $R$  описаннаго около треугольника круга мы вывели (221) слѣдующее выраженіе:

$$R = \frac{bc}{2h_a}$$

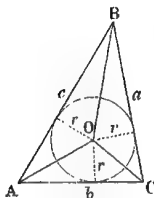
Исключимъ изъ этой формулы высоту  $h_a$ , для этого умножимъ числителя

и знаменателя дроби на  $a$ ; тогда, заменивъ произведение  $h_a a$  удвоенною площадью треугольника, (которую обозначимъ  $S$ ), получимъ:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

гдѣ

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$



Черт. 215

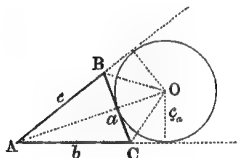
Чтобы найти радиусъ  $r$  внутреннего вписаннаго круга (черт. 215) примемъ во вниманіе, что прямыя  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  раздѣляютъ данный тр.-къ на три другіе тр.-ка, у которыхъ основаніями служатъ стороны данного тр.-ка, а высотой радиусъ  $r$ . Поэтому:

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r \cdot \frac{1}{2}(a+b+c) = rp$$

Отсюда  $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

Радиусъ  $\rho_a$  вневписаннаго круга, (черт. 216) касающагося стороны  $a$ , можно опредѣлить изъ равенства:

$$\begin{aligned} \text{пл. } ABC &= \text{пл. } ACO + \\ &+ \text{пл. } ABO - \text{пл. } BOC \end{aligned}$$



Черт. 216

$$\text{т.-с. } S = \frac{1}{2}b\rho_a + \frac{1}{2}c\rho_a - \frac{1}{2}a\rho_a$$

Откуда:

$$\rho_a = \frac{2S}{b+c-a} = \frac{2S}{2(p-a)} = \frac{S}{p-a}$$

Подобно этому найдемъ:

$$\rho_b = \frac{S}{p-b} \quad \text{и} \quad \rho_c = \frac{S}{p-c}$$

Между четырьмя радиусами:  $r$ ,  $\rho_a$ ,  $\rho_b$  и  $\rho_c$  существуютъ нѣкоторыя зависимости. Укажемъ простѣйшую изъ нихъ:

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{3p-a-b-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S}$$

$$\text{По } \frac{1}{r} = \frac{p}{S}; \text{ слѣд. } \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{r}$$



## У П Р А Ж Н Е Н І Я.

### Доказати теореми:

261. Въ паралелограмѣ разстоянія какой-нибудь точки діагонали отъ двухъ прилежащихъ сторонъ обратно пропорціональны этимъ сторонамъ.

262. Площадь трапеціи равна половинѣ произведенія одной изъ непараллельныхъ сторонъ на перпендикуляръ, опущенный изъ середины другой непараллельной стороны на первую.

263. Два четырехугольника равновелики, если у нихъ равны порознь діагонали и углы между ними.

264. Если площади двухъ треугольниковъ, прилежащихъ къ основаніямъ трапеціи и образуемыхъ отъ пересѣченія ея діагоналей, равны соответственно  $p^2$  и  $q^2$ , то площадь всей трапеціи равна  $(p + q)^2$ .

265. Площадь правильного вписаннаго шестигульника равна  $\frac{3}{4}$  площади правильного описаннаго шестигульника.

266. Въ четырехугольникѣ  $ABCD$  черезъ середину діагонали  $BD$  проведена прямая, параллельная другой діагонали  $AC$ ; эта прямая пересѣкаетъ сторону  $AD$  въ точкѣ  $E$ . Доказать, что прямая  $CE$  дѣлитъ четырехугольникъ пополамъ.

267. Если медианы треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь послѣдняго равна  $\frac{3}{4}$  площади перваго.

268. Въ кругѣ съ центромъ  $O$  проведена хорда  $AB$ . На радіусѣ  $OA$ , какъ на діаметрѣ, описана окружность. Доказать, что площади двухъ сегментовъ, отсѣкаемыхъ хордою  $AB$  отъ обонхъ круговъ, относятся, какъ 4 : 1.

### Задачи на вычисленіе.

269. Вычислить площадь прямоугольной трапеціи, у которой одинъ изъ угловъ равенъ  $60^\circ$ , зная или оба основанія, или одно основаніе и высоту, или одно основаніе и боковую сторону, наклонную къ основанію.

270. Вычислить площадь равносторонняго треугольника, зная его высоту  $h$ .

271. Даны основанія трапеціи  $B$  и  $b$  и ея высота  $H$ . Вычислять высоту треугольника, образованнаго продолженіемъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи до взаимнаго пересѣченія.

272. Составить формулу для площади правильнаго вписаннаго 12-угольника въ зависимости отъ радіуса круга.

273. Въ треугольникъ вписать другой треугольникъ, котораго вершины дѣлятъ пополамъ стороны перваго треугольника; въ другой треугольникъ вписать подобнымъ же образомъ третій тр.-къ; въ третій —

четвертый; и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммъ площадей этихъ треугольниковъ.

274. Въ данномъ треугольникѣ извѣстны стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Изъ середины этихъ сторонъ возстановлены перпендикуляры  $x$ ,  $y$  и  $z$  до взаимнаго пересѣченія въ центрѣ описаннаго круга. Найти въ зависимости отъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и радиусъ  $R$  описаннаго круга (*указаніе*: пользуясь теоремою Птолемея (215), можно вывести уравненія:  $bz + cy = aR$ ,  $cx + az = bR$ ,  $ay + bx = cR$  и  $ax + by + cz = 2S$ , гдѣ  $S$  есть площадь треугольника).

### Задачи на построение.

275. Раздѣлить треугольникъ прямыми, проходящими черезъ его вершину, на три части, которыхъ площади относились бы, какъ  $m : n : p$ .

276. Раздѣлить пополамъ тр.-къ прямою, проходящею черезъ данную точку его стороны.

277. Найти внутри тр.-ка такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ вершинами тр.-ка, дѣлили его на три равновеликія части.

278. — то же — на три части въ отношеніи  $2 : 3 : 4$  (или вообще  $m : n : p$ ).

279. Раздѣлить параллелограммъ на три равновеликія части прямыми, исходящими изъ вершины его.

280. Раздѣлить параллелограммъ на двѣ части въ отношеніи  $m : n$  прямою, проходящею черезъ данную точку.

281. Раздѣлить параллелограммъ на 3 равновеликія части прямыми, параллельными диагонали.

282. Раздѣлить площадь тр.-ка въ среднемъ и крайнемъ отношеніи прямою, параллельною основанію.

283. Раздѣлить тр.-къ на три равновеликія части прямыми, перпендикулярными къ основанію.

284. Раздѣлить кругъ на 2, на 3, ... равновеликія части концентрическими окружностями.

285. Раздѣлить пополамъ трапецію прямою, параллельною основаніямъ (*указаніе*: продолживъ непараллельныя стороны до взаимнаго пересѣченія, взять за неизмѣнную величину разстояніе конца искомой линіи до вершины тр.-ка; составить пропорціи, исходя изъ площадей подобныхъ тр.-ковъ....)

286. Данный прямоугольникъ превратить въ другой равновеликій прямоугольникъ съ даннымъ основаніемъ.

287. Построить квадратъ, равновеликій  $\frac{2}{3}$  даннаго квадрата.

288. Превратить квадратъ въ равновеликій прямоугольникъ, у котораго сумма  $s$  или разность  $d$  двухъ смежныхъ сторонъ дана.

289. Построить кругъ, равновеликій кольцу, заключенному между двумя данными концентрическими окружностями.

290. Построить тр.-къ, подобный одному и равновеликій другому изъ двухъ данныхъ тр.-ковъ.

291. Данный тр.-къ превратить въ равновеликій равносторонній (посредствомъ приложенія алгебры къ геом.).

292. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ съ данною площадью  $m^2$  (посредствомъ приложенія алгебры къ геом.).

293. Въ данный тр.-къ вписать прямоугольникъ съ данною площадью  $m^2$  (прилож. алг. къ геом.).

### Числовые задачи на разные отдѣлы планиметріи\*).

294. Катеты прямоуг. тр.-ка суть 3 ф. и 4 ф. Найти площадь круга, котораго окружность проходитъ черезъ среднюю мѣшного катета и касается гипотенузы въ ея среднѣхъ.

295. Точка касанія окружности, вписанной въ прямоугольный тр.-къ, дѣлитъ гипотенузу на отрѣзки  $a$  и  $b$ . Найти площадь тр.-ка.

296. Катеты прям. тр.-ка суть  $b$  и  $c$  фут. Найти биссектрису прямого угла.

297. Радиусы двухъ концентрическихъ окружностей суть 15 д. и 8 д. На продолженномъ діаметрѣ взята точка на разстояніи 17 д. отъ общаго центра и изъ нея проведены касательныя къ этимъ окружностямъ. Найти разстояніе точекъ касанія (указаніе: прихѣлпнть теорему Птоломея).

298. Часть площади круга, заключенная между стороною вписаннаго квадрата и параллельною ей стороною правильнаго впис. 6-угольника, равна  $\frac{1}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 6)$ . Найти сторону квадрата, равновеликаго данному кругу.

299. Въ ромбѣ, который раздѣляется діагональю на два равносторонніе тр.-ка, вписать кругъ. Найти сторону ромба въ записности отъ радиуса этого круга.

300. Въ тр.-кѣ, котораго стороны суть 4 ф., 5 ф. и 6 ф., проведены биссектрисы мѣшного угла и смежнаго съ нимъ вѣшного угла. Найти отрѣзокъ протяволежащей стороны, заключенный между этими биссектрисами.

301. Въ равностороннемъ тр.-кѣ со стороною  $a$  вписанъ кругъ, а изъ вершины тр.-ка радиусомъ, равнымъ половинѣ его стороны, описана другая окружность. Найти площадь, общую обоимъ кругамъ.

302. Въ треугольникѣ двѣ стороны суть  $a$  и  $b$ . Найти третью сторону и площадь, если уголъ между сторонами  $a$  и  $b$  равенъ:  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $75^\circ$ ;  $135^\circ$ .

303. Длины двухъ параллельныхъ хордъ круга суть 30 д. и 16 д., а разстояніе между ними 7 д. Найти площадь круга.

304. Черезъ точку, удаленную отъ центра круга на длину діаметра, проведена такая сѣкущая, которая дѣлится окружностью пополамъ. Найти длину сѣкущей, если радиусъ круга равенъ  $\sqrt{6}$ .

\*) Взяты изъ „Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметріи“, составилъ М. Попруженко, Воронежъ, 1889 года.

305. Въ кругѣ радиуса  $R$  проведена хорда, стягивающая дугу въ  $108^\circ$ . Найти ея длину.

306. На диаметрѣ полуокруга радиуса  $R$  построенъ равнобедренный тр.-к. Найти площадь той его части, которая лежитъ внѣ круга.

307. Найти радиусъ окружности, касательной къ сторонамъ  $a$  и  $b$  треугольника, и центръ которой лежитъ на третьей его сторонѣ  $c$ .

308. Къ двумъ извѣстнѣмъ касающимся въ точкѣ  $A$  окружностямъ, радиусы которыхъ суть 3 д. и 1 д., проведена внѣшняя касательная  $BC$ . Найти площадь фигуры  $ABC$ , ограниченной двумя дугами и касательной.

309. Полуокружность радиуса  $R$  раздѣлена на три равныя части и точки дѣленія соединены съ концомъ диаметра. Найти площадь, ограниченную двумя хордами и заключенною между ними дугою.

310. Стороны тр.-ка  $ABC$  продолжены въ одномъ направленіи до точекъ  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , такъ что  $AA_1 = 3AB$ ,  $BB_1 = 3BC$  и  $CC_1 = 3CA$ . Найти отношение площадей тр.-ковъ  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

311. Изъ вершины тр.-ка проведена къ его основанію прямая, дѣлящая основаніе на два отрезка  $m$  и  $n$ . Найти длину этой прямой, если стороны тр.-ка, прилежащія къ отрезкамъ  $m$  и  $n$ , суть  $a$  и  $b$ .

312. Кругъ радиуса  $R$  обложаетъ тремя равными кругами, касающимися даннаго и взаимно. Найти радиусъ одного изъ этихъ круговъ.

313. Определить высоту башни, если извѣстно, что лѣзвю отойти на  $a$  футовъ отъ ея основанія, чтобы башня была видна подъ угломъ въ  $30^\circ$ .

314. По даннымъ хордамъ  $a$  и  $b$ , стягивающимъ двѣ дуги въ кругѣ единичнаго радиуса, найти хорду, стягивающую разность этихъ дугъ (указаніе: примѣнить теорему Птолемея).

315. Прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, раздѣляетъ ее на двѣ части въ отношеніи 7 : 2 (считая отъ большаго основанія). Найти длину этой прямой, если основанія трапеціи суть 5 ф. и 3 ф.

316. Изъ точки, дѣлящей основаніе тр.-ка въ отношеніи  $m : n$ , проведены прямая, параллельная двумъ другимъ сторонамъ. Найти отношеніе площадей каждой изъ частей, на которыя раздѣлится тр.-к., къ площади всего тр.-ка.

317. Изъ некоторой точки внутри тр.-ка на стороны его  $a$ ,  $b$  и  $c$  опущены перпендикуляры  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Найти отношеніе площади тр.-ка, который образуется отъ соединенія основаній этихъ перпендикуляровъ, къ площади даннаго тр.-ка. (Указаніе: см. § 290).

318. Вычислить діагонали трапеціи по четыремъ ея сторонамъ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . (Указаніе: надо примѣнить къ діагонали теорему о квадратѣ стороны тр.-ка).

319. Найти площадь трапеціи по четыремъ ея сторонамъ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

320. На противоположныхъ сторонахъ квадрата построены внутри его два равносторонніе тр.-ка. Пересѣченіе сторонъ этихъ тр.-ковъ опредѣляетъ некоторый четырехугольникъ. Найти его видъ, стороны, углы и площадь, если сторона квадрата равна  $a$ .

321. Проведена окружность, касающаяся одной стороны прямого угла и пересѣкающая другую сторону въ точкахъ, отстоящихъ отъ вершины угла на 6 д. и 24 д. Вычислить радіусъ этой окружности и разстояніе точки касанія отъ вершины угла.

322. Вычислить площадь тр.-ка по двумъ сторонамъ  $a$  и  $b$  и медианѣ  $m$  относительно третьей стороны.

323. На общей хордѣ  $AB$  построены (по одну сторону отъ  $AB$ ) два сегмента, изъ которыхъ одинъ выѣщаетъ уголъ  $135^\circ$ , а другой  $120^\circ$ . Найти площадь луночки, заключенной между дугами сегментовъ.

324. На радіусахъ квадрата (четверть круга) внутри его построены два полукруга. Найти площадь той части квадрата, которая лежитъ внѣ полукруговъ, если радіусъ квадрата есть  $R$ .

325. Въ прямоугольномъ тр.-кѣ  $ABC$  опущенъ перпендикуляръ  $AD$  на гипотенузу  $BC$ . Зная радіусы  $r_1$  и  $r_2$  окружностей, вписанныхъ въ тр.-ки  $ABD$  и  $ACD$ , найти радіусъ  $r$  окружности, вписанной въ треугольникъ  $ABC$ .

326. На окружности радіуса  $R$  отложены отъ точки  $A$  (по обѣмъ сторонамъ) двѣ дуги:  $AC = 30^\circ$  и  $AB = 60^\circ$ . Найти площадь тр.-ка  $ABC$ .

## СТЕРЕОМЕТРІЯ.

### КНИГА I.

## ПРЯМЫЯ И ПЛОСКОСТИ.

### ГЛАВА I.

#### Опредѣленіе положенія плоскости.

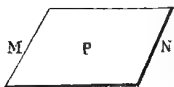
**303. Определеніе.** Плоскостью наз. поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что *прямая, проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки этой поверхности, лежитъ въ ней всѣми остальными своими точками.* Возможность существованія такой поверхности принимается за аксіому.

**304.** Изъ понятія о плоскости и прямой линіи слѣдуетъ:

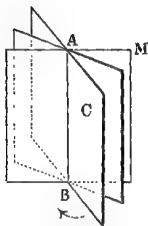
1°. Плоскость есть поверхность неограниченная.

2°. Прямая, имѣющая съ плоскостью только одну общую точку, *пересѣкаетъ* плоскость, т.-е. изъ пространства, лежащаго по одну сторону отъ плоскости, переходитъ въ пространство, лежащее по другую ее сторону.

3°. Черезъ всякую прямую можно провести плоскость.

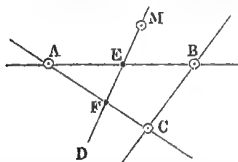


Черт. 217



Черт. 218

произвольную плоскость. Станемъ вращать эту плоскость во-



Черт. 219

другую черезъ  $P_1$ . Докажемъ, что эти двѣ плоскости сливаются въ одну.—Предварительно замѣтимъ, что прямыя  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , проходящія черезъ каждую пару данныхъ точекъ, принадлежать обѣимъ плоскостямъ, такъ какъ эти прямыя имѣютъ по двѣ общихъ точки съ плоскостью  $P$ , и съ плоскостью  $P_1$ . Возьмемъ теперь на плоскости  $P$  произвольную точку  $M$  и проведемъ черезъ нее на этой плоскости какую-

**305.** Плоскость изображается на чертежѣ въ видѣ нѣкоторой ея части, обыкновенно въ формѣ параллелограмма или прямоугольника. Обозначается плоскость болѣею частью одною или двумя буквами; такъ, говорятъ: плоскость  $P$ , плоскость  $MN$ .

**306. Аксиома.** Если вращать какую-нибудь плоскость ( $M$ , черт. 218) вокругъ прямой ( $AB$ ), лежащей въ ней, то она можетъ пройти черезъ любую точку ( $C$ ) пространства.

**307. Теорема.** Черезъ три точки ( $A$ ,  $B$  и  $C$ , черт. 219), не лежащія на одной прямой, можно провести плоскость и притомъ только одну.

1°. Черезъ какія-нибудь двѣ изъ трехъ данныхъ точекъ, напр. черезъ  $A$  и  $B$ , проведемъ прямую и черезъ нее

вокругъ прямой  $AB$  до тѣхъ поръ, пока она не пройдетъ черезъ точку  $C$  (306). Тогда будемъ имѣть плоскость, которая проходитъ черезъ три данныя точки.

2°. Вообразимъ, что черезъ тѣ же три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно провести двѣ плоскости.

Обозначимъ одну черезъ  $P$ , а

нибудь прямую  $MD$ . Эта прямая, находясь въ одной плоскости  $P$  съ прямыми  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , должна пересѣчься по крайней мѣрѣ съ двумя изъ нихъ, напр. съ  $AB$  и  $AC$ , въ некоторыхъ точкахъ  $E$  и  $F$ . Такъ какъ прямыя  $AB$  и  $AC$  принадлежать другой плоскости  $P_1$ , то и точки ихъ  $E$  и  $F$  также принадлежать этой плоскости. Вслѣдствіе этого прямая  $MD$ , проходящая черезъ  $E$  и  $F$ , лежитъ вся въ плоскости  $P_1$  (по опредѣленію плоскости), а потому и ея точка  $M$  лежитъ въ этой плоскости. Такимъ образомъ, всякая точка  $M$  плоскости  $P$  принадлежит и плоскости  $P_1$ ; значитъ, эти плоскости сливаются.

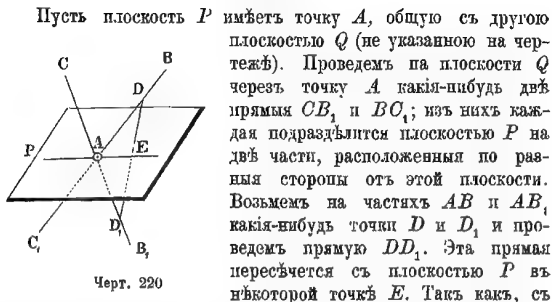
**308. Слѣдствія.** 1°. *Черезъ прямую и точку вне ея можно провести плоскость и притомъ только одну, потому что точка внѣ прямой вмѣстѣ съ какими-нибудь двумя точками прямой составляютъ три точки, черезъ которыя, по доказанному, можно провести плоскость и притомъ одну.*

2°. *Черезъ двѣ пересекающіяся прямыя можно провести плоскость и притомъ только одну, потому что, взявъ точку пересѣченія и еще по одной точкѣ на каждой прямой, мы будемъ имѣть три точки, черезъ которыя и т. д.*

3°. *Черезъ двѣ параллельныя прямыя можно провести плоскость и притомъ только одну, потому что параллельныя прямыя, по опредѣленію, лежатъ въ одной плоскости; эта плоскость единственная, такъ какъ черезъ одну изъ параллельныхъ и какую-нибудь точку другой можно провести не болѣе одной плоскости.*

4°. *Всякую часть плоскости можно наложить вѣстни ея точками на другое мѣсто этой или другой плоскости. причемъ накладываемую часть можно предварительно перевернуть другою стороною, потому что всегда возможно наложить одну плоскость на другую такъ, чтобы у нихъ совпали какія-нибудь три точки, не лежащія на одной прямой, а тогда совпадутъ и остальные точки.*

**309. Теорема.** *Если двѣ не сливающіяся плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ и общую прямую, проходящую черезъ эту точку.*



Черт. 220

Пусть плоскость  $P$  имѣетъ точку  $A$ , общую съ другою плоскостью  $Q$  (не указанною на чертежѣ). Проведемъ па плоскости  $Q$  черезъ точку  $A$  какія-нибудь двѣ прямыя  $CB_1$  и  $BC_1$ ; изъ нихъ каждая подраздѣлится плоскостью  $P$  на двѣ части, расположенныя по разнымъ стороны отъ этой плоскости. Возьмемъ на частяхъ  $AB$  и  $AB_1$  какія-нибудь точки  $D$  и  $D_1$  и проведемъ прямую  $DD_1$ . Эта прямая пересѣчется съ плоскостью  $P$  въ нѣкоторой точкѣ  $E$ . Такъ какъ, съ другой стороны, эта прямая имѣетъ съ плоскостью  $Q$  двѣ общія точки  $D$  и  $D_1$ , то она принадлежитъ ей вся. Поэтому точка  $E$  прямой  $DD_1$  также принадлежитъ плоскости  $Q$ . Итакъ, плоскости  $P$  и  $Q$  имѣютъ двѣ общія точки  $A$  и  $E$ ; значить, онѣ имѣютъ и общую прямую  $AE$ , проходящую черезъ эти точки.

**310. Слѣдствіе.** *Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линия.*

Дѣйствительно, чтобы плоскости пересѣкались, необходимо, чтобы онѣ имѣли общую точку; но въ такомъ случаѣ онѣ будутъ имѣть и общую прямую. Какой-нибудь еще общей точки, сверхъ точекъ этой прямой, плоскости имѣть не могутъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ онѣ должны были бы слиться въ одну (308, 1°).



## ГЛАВА II.

### Перпендикуляръ и наклонныя.

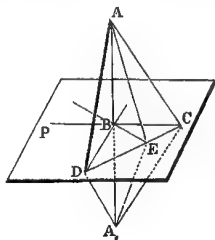
**§ 11. Опредѣленіе.** Прямая наз. *перпендикулярною* къ плоскости, если она пересѣкается съ этою плоскостью и при этомъ образуетъ прямые углы со всѣми прямыми, проведенными на плоскости черезъ точку пересѣченія. Въ этомъ случаѣ говорятъ также, что плоскость перпендикулярна къ прямой.

Прямая, пересѣкающаяся съ плоскостью, но не перпендикулярная къ ней, наз. *наклонною*. Точка пересѣченія прямой съ плоскостью наз. *основаніемъ* (перпендикуляра или наклонной).

Возможность существованія взаимно перпендикулярныхъ прямой и плоскости обнаружится изъ нижеслѣдующихъ теоремъ.

**§ 12. Теорема.** Прямая, перпендикулярная къ двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости черезъ ея основаніе, перпендикулярна къ самой плоскости.

Пусть прямая  $AB$  перпендикулярна къ прямымъ  $BO$  и  $BD$ , проведеннымъ на плоскости  $P$  черезъ основаніе  $B$ . Чтобы доказать перпендикулярность прямой  $AB$  къ плоскости  $P$ , достаточно показать, что  $AB$  перпендикулярна ко всякой третьей прямой  $BE$ , проведенной на той же плоскости черезъ точку  $B$ . — Продолживъ  $AB$ , отложимъ произвольныя, но равныя, длины  $BA_1$  и  $BA$  и проведемъ на плоскости прямую  $DC$ , которая пересѣкала бы прямые  $BC$ ,  $BE$  и  $BD$  въ какихъ-нибудь точкахъ  $C$ ,  $E$  и  $D$ . Соединимъ эти точки съ  $A$  и  $A_1$  и убѣдимся, что тр.-ки  $ABE$  и  $A_1BE$  равны. Для этого

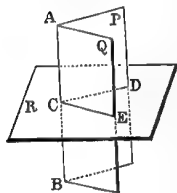


Черт. 221

сначала беремъ тр.-ки  $ADC$  и  $A_1DC$ ; они равны, потому что у нихъ  $DC$  общая сторона,  $AC=A_1C$ , какъ наклонныя къ  $AA_1$ , одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра  $BC$ ; по той же причинѣ  $AD=A_1D$ . Изъ равенства этихъ тр.-ковъ слѣдуетъ, что  $\angle ACD=\angle A_1CD$ . Послѣ этого перейдемъ къ тр.-камъ  $ACE$  и  $A_1CE$ ; они равны, потому что у нихъ  $EC$  общая сторона,  $AC=A_1C$  и  $\angle ACD=\angle A_1CD$ ; изъ равенства этихъ тр.-ковъ выводимъ, что  $AE=A_1E$ . Теперь оказывается, что тр.-ки  $ABE$  и  $A_1BE$  имѣютъ соответственно равныя стороны и потому равны; значить,  $\angle ABE=\angle A_1BE$ , т.-е.  $AB \perp BE$ .

**313. Теорема.** *Черезъ всякую точку, взятую на прямой или внѣ ея, можно провести къ этой прямой перпендикулярную плоскость и притомъ только одну.*

1°. Пусть  $C$  будетъ точка, взятая на прямой  $AB$ . Про-



Черт. 222

ведемъ черезъ эту прямую какія-нибудь двѣ плоскости  $P$  и  $Q$  и на нихъ возьмемъ прямыя  $CD$  и  $CE$ , перпендикулярныя къ  $AB$ . Черезъ эти двѣ пересекающіяся прямыя проведемъ плоскость  $R$ . Это и будетъ плоскость, перпендикулярная къ  $AB$  въ точкѣ  $C$ , потому что двѣ ея прямыя  $CD$  и  $CE$  перпендикулярны къ  $AC$ . Такая плоскость можетъ быть только одна. Дѣйствительно, всякая плоскость, перпендикулярная къ  $AB$  въ точкѣ  $C$ , долж-

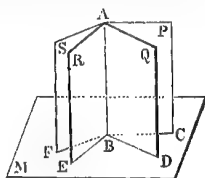
жна пересѣчься съ плоскостями  $P$  и  $Q$  по прямымъ, перпендикулярнымъ къ  $AC$  и проходящимъ черезъ точку  $C$ ; такими прямыми будутъ только  $CD$  и  $CE$ ; а черезъ  $CD$  и  $CE$  можетъ проходить только одна плоскость.

2°. Пусть  $D$  будетъ точка, взятая внѣ прямой  $AB$  (черт. 222). Проведемъ черезъ  $D$  и  $AB$  плоскость  $P$  и черезъ  $AB$  еще какую-нибудь плоскость  $Q$ ; на первой опустимъ на  $AB$  изъ точки  $D$  перпендикуляръ  $DC$ , а на второй возставимъ къ  $AB$  изъ точки  $C$  перпендикуляръ  $CE$ . Плоскость  $R$ , проходящая черезъ  $DC$  и  $CE$ , будетъ перпендикулярна къ

*AB* (312). Другой перпендикулярной плоскости через точку *D* провести нельзя. Действительно, всякая плоскость, перпендикулярная к *AB* и проходящая через *D*, пересечется с плоскостью *P* по прямой, перпендикулярной к *AB* и проходящей через *D*, т.-е. по *DC*; тогда с плоскостью *Q* она может пересечься только по прямой *CE*; а через *DC* и *CE* может проходить только одна плоскость.

**314. Следствие.** *Вся перпендикуляры, которые можно провести въ пространствѣ къ одной прямой черезъ одну ея точку, лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ этой прямой.*

Проведемъ черезъ прямую *AB* сколько угодно плоскостей *P, Q, R, S...* и на каждой изъ нихъ черезъ точку *B* проведемъ по прямой, перпендикулярной къ *AB*. Пусть это будутъ *BC, BD, BE...* Черезъ двѣ изъ нихъ, напр. черезъ *BC* и *BD*, вообразимъ плоскость *M*. Эта плоскость перпендикулярна къ *AB* (312). Что-

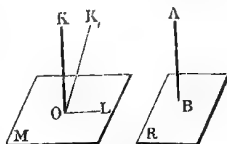


Черт. 223

бы доказать, что она содержитъ въ себѣ всѣ прочія изъ проведенныхъ нами перпендикулярныхъ линій, вообразимъ, что какая-нибудь изъ нихъ, напр., линія *BE*, не лежитъ въ плоскости *M*; тогда на плоскости *R* можно провести къ *AB* черезъ точку *B* два перпендикуляра: одинъ *BE*, а другой пересѣченіе плоскостей *R* и *M*; такъ какъ это невозможно, то прямая *BE* и всякая другая, перпендикулярная къ *AB* въ точкѣ *B*, должна лежать на плоскости *M*.

**315. Теорема.** *Изъ всякой точки (*O*, черт. 224) плоскости (*M*) можно возставить къ этой плоскости перпендикуляръ и притомъ только одинъ.*

Возьмемъ какую-нибудь прямую *AB* и черезъ произвольную ея точку *B* проведемъ къ ней



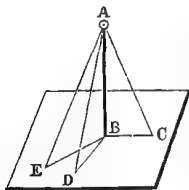
Черт. 224

перпендикулярную плоскость  $R$ . Совместимъ эту плоскость съ плоскостью  $M$  такъ, чтобы точка  $B$  совпала съ  $O$ . Тогда прямая  $BA$ , занявъ нѣкоторое положеніе  $OK$ , будетъ перпендикулярна къ  $M$  въ точкѣ  $O$ . Чтобы доказать теперь, что этотъ перпендикуляръ *единственный*, предположимъ, что прямая  $OK_1$  будетъ другимъ перпендикуляромъ къ  $M$ . Проведемъ черезъ  $OK$  и  $OK_1$  плоскость и возьмемъ ся пересѣченіе  $OL$  съ плоскостью  $M$ . Тогда углы  $KOL$  и  $K_1OL$  должны быть оба прямые; но это невозможно, такъ какъ одинъ изъ нихъ составляетъ часть другого; значить, другого перпендикуляра къ  $M$  въ точкѣ  $O$  возставить нельзя.

**316.** Когда изъ одной точки  $A$  (черт. 225) проведены къ плоскости перпендикуляръ  $AB$  и наклонная  $AC$ , условився разстояніе  $BC$  между ихъ основаніями называть *проекціей* наклонной на плоскость  $P$ .

**317. Теоремы.** Если изъ одной точки ( $A$ , черт. 225) проведены къ плоскости перпендикуляръ ( $AB$ ) и наклонныя ( $AC, AD, AE..$ ), то:

- 1°, перпендикуляръ короче всякой наклонной;
- 2°, двѣ наклонныя, имѣющія равныя проекціи, равны;
- 3°, изъ двухъ наклонныхъ та больше, которой проекція больше.



Черт. 225

Вращая прямоугольные тр.-ки  $ABC$  и  $ABD$  вокругъ катета  $AB$ , мы можемъ совместить ихъ плоскости съ плоскостью тр.-ка  $ABE$ . Тогда всѣ наклонныя будутъ лежать въ одной плоскости съ перпендикуляромъ, и всѣ проекціи расположатся на одной прямой. Такимъ образомъ, доказываемая теорема приводится къ аналогичной теоремѣ планиметріи (55).

**318. Обратныя теоремы.** 1°. Кратчайшее разстояніе точки отъ плоскости есть перпендикуляръ;

- 2°. Равныя наклонныя имѣютъ равныя проекціи;

3°. Из двух проекцій та больше, которая соотвѣтствуетъ большей наклонной.

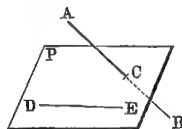
Доказательство (отъ противнаго) предоставляемъ самимъ учащимся.

### ГЛАВА III.

## Параллельныя прямыя и плоскости.

### Параллельныя прямыя.

**319.** Двѣ прямыя могутъ быть расположены въ пространствѣ такъ, что черезъ нихъ нельзя провести плоскости. Возьмемъ, напр., двѣ такія прямыя  $AB$  и  $DE$ , изъ которыхъ одна пересѣкаетъ плоскость  $P$ , а другая лежитъ въ ней, но не проходитъ черезъ точку пересѣченія  $C$ . Черезъ такія двѣ прямыя нельзя провести плоскости, потому что въ противномъ случаѣ черезъ прямую  $DE$  и точку  $C$  проходили бы двѣ различныя плоскости: одна  $P$ , пересѣкающая прямую  $AB$ , и другая, содержащая ее; а это невозможно (308, 1°).



Черт. 226

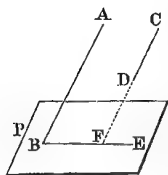
Двѣ прямыя, не лежащія въ одной плоскости, конечно, не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали; однако ихъ не называютъ параллельными, оставляя это названіе только для такихъ прямыхъ, которыя, находясь въ одной плоскости, не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали.

Въ планиметріи мы видѣли (69 и 72), что черезъ всякую точку плоскости можно провести прямую, и притомъ только одну, параллельную данной прямой. То же самое можно сказать о всякой точкѣ пространства, потому что черезъ точку и данную прямую можно провести плоскость и только одну.

**320. Теорема.** Плоскость ( $P$ , черт. 227), пересѣкающая одну изъ параллельныхъ прямыхъ ( $AB$ ), пересѣкаетъ и другую ( $CD$ ).

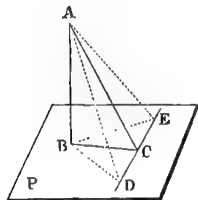
Проведемъ черезъ  $AB$  и  $CD$  плоскость. Эта плоскость

содержитъ въ себѣ ту точку  $R$ , въ которой прямая  $AB$  пересѣкается съ  $P$ ; значитъ, эта плоскость пересѣкается съ  $P$  по некоторой прямой  $BE$  (309). Эта прямая, находясь въ одной плоскости съ  $AB$  и  $CD$  и пересѣкая одну изъ этихъ параллельныхъ, должна пересѣчь и другую (73) въ некоторой точкѣ  $F$ . Точка  $F$ , находясь на прямой  $BE$  и на прямой  $CD$ , должна быть точкою пересѣченія плоскости  $P$  съ прямой  $CD$ .



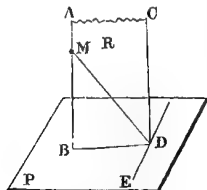
Черт. 227

**321. Лемма.** Прямая ( $DM$ , черт. 228), проведенная на плоскости ( $P$ ) через основаніе наклонной ( $AC$ ) перпендикулярно къ ея проекціи ( $BC$ ), перпендикулярна и къ самой наклонной.



Черт. 228

Отложимъ произвольныя, но равныя, части  $CD$  и  $CE$  и соединимъ точки  $A$  и  $B$  съ  $D$  и  $E$ . Тогда будемъ имѣть:  $BD = BE$ , какъ наклонныя къ  $DE$ , одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра  $BC$ ;  $AD = AE$ , какъ наклонныя къ плоскости  $P$ , имѣющія равныя проекціи  $BD$  и  $BE$ . Вслѣдствіе этого  $\triangle ADE$  есть равнобедренный, и потому его медиана  $AC$  перпендикулярна къ основанію  $DE$  (38).



Черт. 229

**322. Теорема.** Плоскость ( $P$ , черт. 229), перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ прямыхъ ( $AB$ ), перпендикулярна и къ другой ( $CD$ ).

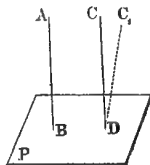
Предстоитъ доказать, что во 1° прямая  $CD$  пересѣкается съ  $P$ , а во 2° эта прямая перпендикулярна къ какому-нибудь двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости  $P$  черезъ основаніе  $CD$ .

1°. Плоскость  $P$  должна пересѣчь  $CD$ , потому что она, по условію, пересѣкаетъ прямую  $AB$ , параллельную  $CD$ .

2°. Проведемъ черезъ  $AB$  и  $CD$  плоскости  $R$  и возьмемъ ея пересѣченіе  $BD$  съ плоскостью  $P$ . Такъ какъ, по условію,  $AB$  перпендикулярна къ  $P$ , то  $AB \perp BD$ ; поэтому и  $CD \perp BD$  (74). Проведемъ на плоскости  $P$  прямую  $DE$ , перпендикулярную къ  $BD$ , и возьмемъ какую-нибудь наклонную  $MD$ , для которой проекціей служить  $BD$ . Прямая  $ED$ , будучи перпендикулярна къ проекціи  $BD$ , должна быть перпендикулярна и къ наклонной  $MD$  (321) и, слѣд., перпендикулярна къ плоскости  $R$  (312), значить, и къ прямой  $CD$ . Такимъ образомъ, прямая  $CD$  оказывается перпендикулярною къ двумъ прямымъ плоскости  $P$ , именно къ  $DB$  и  $DE$ ; слѣд., она перпендикулярна къ этой плоскости.

**323. Обратная теорема.** *Два перпендикуляра ( $AB$  и  $CD$ , черт. 230) къ одной плоскости ( $P$ ) параллельны.*

Предположимъ, что линіей, параллельной  $AB$  и проходящей черезъ точку  $D$ , будетъ не  $CD$ , а какая-нибудь иная прямая  $C_1D$ . Тогда, согласно прямой теоремѣ,  $C_1D$  будетъ перпендикуляромъ къ  $P$ , что невозможно, такъ какъ перпендикуляромъ къ  $P$ , по условію, служить  $CD$ .

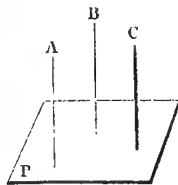


Черт. 220

**324. Слѣдствіе.** *Изъ всякой точки ( $A$ , черт. 230) въ плоскости ( $P$ ) можно опустить на эту плоскость перпендикуляръ и притомъ только одинъ.*

Дѣйствительно, всегда возможно изъ какой-нибудь точки  $D$  плоскости  $P$  возставить къ ней перпендикуляръ  $DC$  (315) и затѣмъ черезъ  $A$  провести  $AB \parallel CD$ . Прямая  $AB$  будетъ перпендикуляромъ къ  $P$  (322).

Другого перпендикуляра изъ точки  $A$  опустить нельзя, потому что перпендикуляръ къ  $P$  дол-



Черт. 231

женъ быть параллельнъ  $DC$  (323), а через  $A$  можно провести только одну прямую, параллельную  $DC$ .

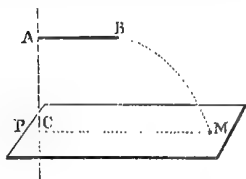
**325. Теорема.** Дѣтъ прямыя ( $A$  и  $B$ , черт. 231), параллельныя третьей прямой ( $C$ ), параллельны между собою.

Проведемъ плоскость  $P$ , перпендикулярную къ  $C$ . Тогда  $A$  и  $B$  будутъ перпендикулярами къ этой плоскости (322), и, слѣд.,  $A \parallel B$  (323).

### Прямая, параллельная плоскости.

**326. Опреѣленіе.** Прямая и плоскость наз. *параллельными*, если онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ не продолжали.

Слѣдующія двѣ теоремы выражаютъ признаки параллельности прямой съ плоскостью.



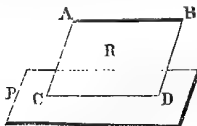
Черт. 232

**327. Теорема 1.** Прямая ( $AB$ , черт. 232), и плоскость ( $P$ ), перпендикулярная къ одной и той же прямой ( $AC$ ), параллельны.

Предположимъ, что  $AB$  пересѣкается съ  $P$  въ точкѣ  $M$ ; тогда, соединивъ  $M$  съ  $C$ , мы будемъ имѣть два перпендикуляра  $MC$  и  $MA$  на прямую  $AC$  изъ одной точки  $M$ , что

невозможно; значить,  $AB$  не пересѣкается съ  $P$ , т.-е.  $AB$  параллельна  $P$ .

**Теорема 2.** Прямая ( $AB$ , черт. 233), параллельная какой-нибудь прямой ( $CD$ ), проведенной на плоскости ( $P$ ), параллельна самой плоскости.



Черт. 233

Проведемъ через  $AB$  и  $CD$  плоскость  $R$ . Такъ какъ прямая  $AB$  на всемъ протяженіи лежитъ на плоскости  $R$ , то она могла бы пересѣчься съ плоскостью  $P$  не иначе, какъ пересѣкаясь съ прямой  $CD$ , что невозможно по условію. Значить,  $AB$  не пересѣкается съ  $P$ , т.-е.  $AB$  параллельна  $P$ .

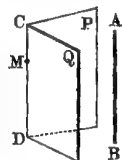


**328. Теорема.** Если плоскость ( $R$ , черт. 233) проходит через прямую ( $AB$ ), параллельную другой плоскости ( $P$ ), и пересѣкает эту плоскость, то линия пересѣчения ( $CD$ ) параллельна первой прямой ( $AB$ ).

Дѣйствительно, во 1°,  $CD$  лежитъ въ одной плоскости съ  $AB$ ; во 2°,  $CD$  не можетъ пересѣчься съ  $AB$ , потому что въ противномъ случаѣ  $AB$  пересѣкалась бы съ  $P$ , что невозможно.

**Слѣдствіе.** Прямая ( $AB$ , черт. 234), параллельная двумъ пересѣкающимся плоскостямъ ( $P$  и  $Q$ ), параллельна линіи ихъ пересѣченія.

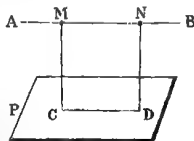
Вообразимъ плоскость черезъ  $AB$  и какую-нибудь точку  $M$  прямой  $CD$ . Эта плоскость должна пересѣчься съ  $P$  и  $Q$  по прямымъ, параллельнымъ  $AB$ , и проходящимъ черезъ  $M$ . Но черезъ  $M$  можно провести только одну прямую, параллельную  $AB$ ; значитъ, два пересѣченія воображаемой плоскости съ плоскостями  $P$  и  $Q$  должны слиться въ одну прямую, которая не можетъ быть иною, какъ  $CD$ ; слѣд.,  $CD \parallel AB$ .



Черт. 234

**329. Теорема.** Вся точки прямой ( $AB$ , черт. 235), параллельной плоскости ( $P$ ), одинаково удалены отъ этой плоскости.

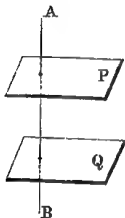
Изъ двухъ какихъ-нибудь точекъ  $M$  и  $N$  прямой  $AB$  опустимъ на  $P$  перпендикуляры  $MC$  и  $ND$ . Такъ какъ эти перпендикуляры параллельны (323), то черезъ нихъ можно провести плоскость. Эта плоскость пересѣчется съ  $P$  по прямой  $CD$ , параллельной  $AB$  (328); поэтому фигура  $MNDC$  будетъ параллелограммъ и, слѣд.,  $MC = ND$ .



Черт. 235

## Параллельныя плоскости.

**330. Определе́ние.** Двѣ плоскости наз. *параллельными*, если онѣ не пересекаются, сколько бы ихъ не продолжали.



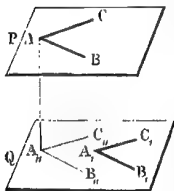
Черт. 236

Слѣдующія двѣ теоремы выражаютъ *признаки* параллельности двухъ плоскостей.

**331. Теорема 1.** Двѣ плоскости ( $P$  и  $Q$ , черт. 236), перпендикулярныя къ одной и той же прямой ( $AB$ ), параллельны.

Если бы плоскости  $P$  и  $Q$  пересѣкались, то черезъ всякую точку ихъ пересѣченія проходили бы двѣ плоскости  $P$  и  $Q$ , перпендикулярныя къ прямой  $AB$ , что невозможно.

**Теорема 2.** Двѣ плоскости ( $P$  и  $Q$ , черт. 237), параллельны, если двѣ пересекающіяся прямой одной изъ нихъ ( $AB$  и  $AC$ ) соответственно параллельны двумъ пересекающимся прямымъ другой ( $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ ).

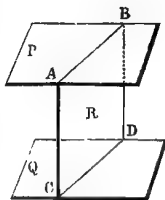


Черт. 237

Изъ точки  $A$  опустимъ на плоскость  $Q$  перпендикуляръ  $AA_{11}$  и проведемъ прямыя  $A_{11}B_{11}$  и  $A_{11}C_{11}$ ; соответственно параллельныя прямымъ  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ ; тогда эти прямыя будутъ также параллельны и линиямъ  $AB$  и  $AC$  (325). Такъ какъ  $AA_{11} \perp A_{11}B_{11}$  и  $AB \parallel A_{11}B_{11}$ , то  $AA_{11} \perp AB$ ; по той же причинѣ  $AA_{11} \perp AC$ . Слѣд., прямая  $AA_{11}$  перпендикулярна къ плоскости  $P$  (312). Такимъ образомъ, плоскости  $P$  и  $Q$  перпендикулярны къ прямой  $AA_{11}$  и потому параллельны.

**332. Теорема.** Если даны параллельныя плоскости ( $P$  и  $Q$ , черт. 238) пересѣкаются третьей плоскостью ( $R$ ), то линіи пересѣченія ( $AB$  и  $CD$ ) параллельны.

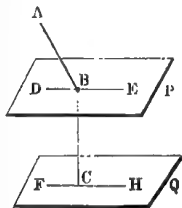
Дѣйствительно, прямыя  $AB$  и  $CD$ , находясь въ одной плоскости  $R$ , не могутъ пересѣчься, такъ какъ въ противномъ случаѣ пересѣкались-бы плоскости  $P$  и  $Q$ , что противорѣчитъ условію.



Черт. 238

**333. Теорема.** Прямая или плоскость, пересѣкающая одну изъ параллельныхъ плоскостей, пересѣкаетъ и другую.

1°. Пусть прямая  $AB$  пересѣкаетъ въ точкѣ  $B$  плоскость  $P$ , параллельную  $Q$ . Опустимъ изъ  $B$  на  $Q$  перпендикуляръ  $BC$  и черезъ  $AB$  и  $BC$  проведемъ плоскость. Эта плоскость, содержа въ себѣ точки  $B$  и  $C$ , пересѣкается съ  $P$  и  $Q$  по нѣкоторымъ прямымъ  $DE$  и  $FH$ , которыя параллельны (332). Прямая  $AB$  лежитъ въ одной плоскости съ  $DE$  и  $FH$  и пересѣкаетъ одну изъ этихъ параллельныхъ; слѣд., какъ мы знаемъ изъ планиметріи (73, 1°), она пересѣчетъ и другую; значитъ, пересѣчетъ и плоскость  $Q$ .



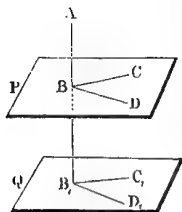
Черт. 239

2°. Пусть какая-нибудь плоскость пересѣкаетъ плоскость  $P$  (черт. 239), параллельную  $Q$ . Тогда на ней можно взять прямую  $AB$ , которая тоже пересѣкаетъ плоскость  $P$ ; по доказанному, эта прямая пересѣчетъ и плоскость  $Q$ ; значитъ, съ этою плоскостью пересѣчется и та плоскость, въ которой взята  $AB$ .

**334. Теорема.** Прямая ( $AB$ , черт. 240), перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей (къ  $P$ ), перпендикулярна и къ другой (къ  $Q$ ).

Прямая  $AB$ , пересѣкая одну изъ параллельныхъ плоско-

стей, пересѣчь и другую въ некоторой точкѣ  $B_1$ . Проведемъ черезъ  $AB$  какія-нибудь двѣ плоскости, которыя пересѣкутся съ  $P$  и  $Q$  по параллельнымъ прямымъ: одна по  $BC$  и  $B_1C_1$ , другая по  $BD$  и  $B_1D_1$ . Согласно условію, прямая  $AB$  перпендикулярна къ  $BC$  и  $BD$ ; слѣд., она также перпендикулярна къ  $B_1C_1$  и  $B_1D_1$ , а потому перпендикулярна и къ плоскости  $Q$ .

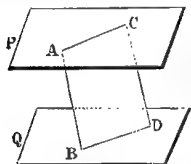


Черт. 240

можно провести плоскость ( $P$ ), параллельную данной плоскости ( $Q$ ), и притомъ только одну.

Предоставляемъ учащимся самимъ доказать это слѣдствіе, на основаніи теоремъ §§ 331 и 334.

**336. Теорема.** Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ ( $AB$  и  $CD$ , черт. 241), заключенные между параллельными плоскостями ( $P$  и  $Q$ ), равны.



Черт. 241

Черезъ параллельныя прямыя  $AB$  и  $OD$  проведемъ плоскость; она пересѣчетъ  $Q$  и  $P$  по параллельнымъ прямымъ  $BD$  и  $AC$ ; слѣд., фигура  $ABDC$  будетъ параллелограммъ и потому  $AB = CD$ .

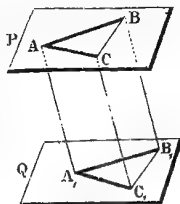
**337. Слѣдствіе.** Параллельныя плоскости вездѣ одинаково удалены одна отъ другой, потому что, когда параллельныя прямыя  $AB$  и  $OD$  (черт. 241)

перпендикулярны къ  $P$ , онѣ будутъ также перпендикулярны къ  $Q$  и въ то же время равны.

**338. Теорема.** Два угла ( $BAC$  и  $B_1A_1C_1$ , черт. 242) съ соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ ( $P$  и  $Q$ ).

Что плоскости  $P$  и  $Q$  параллельны, было доказано выше (331, 2°); остается доказать, что углы  $A$  и  $A_1$  равны. —

Отложимъ  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  и проведемъ  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ . Такъ какъ отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$  равны и параллельны, то фигура  $ABB_1A_1$  есть параллелограммъ (97, 2°); поэтому отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  равны и параллельны. По той же причине равны и параллельны отрезки  $AA_1$  и  $CC_1$ ; слѣд.,  $BB_1 = CC_1$  и  $BB_1 \parallel CC_1$ . Поэтому  $BC = B_1C_1$  и  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  (по тремъ сторонамъ); значитъ,  $\angle A = \angle A_1$ .



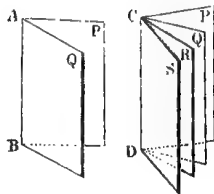
Черт. 242

## ГЛАВА IV.

### Двугранные углы.

**339. Определенія.** Двѣ плоскости  $P$  и  $Q$ , исходящія изъ одной прямой  $AB$ , образуютъ *двугранный уголъ*.

Прямая  $AB$  наз. *ребромъ*, а плоскости  $P$  и  $Q$  — сторонами или *гранями* двуграннаго угла. Такой уголъ обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугр. уголъ  $AB$ ). Но если при одномъ ребрѣ лежать нѣсколько двугр. угловъ, то каждый изъ нихъ обозначаютъ

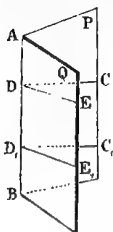


Черт. 243

4-мя буквами, изъ которыхъ двѣ среднія стоятъ при ребрѣ, а двѣ крайнія у граней (напр., двугр. уголъ  $SODQ$ ).

Если изъ произвольной точки  $D$  ребра  $AB$  (черт. 244) проведемъ на каждой грани по перпендикуляру къ ребру, то образованный ими уголъ  $CDE$  наз. *линейнымъ* угломъ двуграннаго. Величина линейнаго угла не зависитъ отъ положенія точки  $D$  на ребрѣ. Такъ, линейные углы  $CDE$  и  $C_1D_1E_1$

равны, потому что их стороны соответственно параллельны и одинаково направлены.



Черт. 244

Не трудно видѣть, что плоскость линейнаго угла перпендикулярна къ ребру (312).

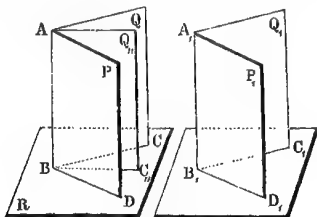
### 340. Равенство двугранныхъ угловъ.

Два двугранные угла считаются *равными*, если они при вложеніи совмѣщаются; въ противномъ случаѣ тотъ изъ угловъ считается меньшимъ, который, будучи вложенъ въ другой такъ, чтобы у нихъ совпали ребра, составитъ часть этого другого угла.

Такъ какъ двугранный уголъ есть величина, то можно разсматривать сумму, разность, произведение и частное двугранныхъ угловъ въ томъ же смыслѣ, какъ и для угловъ планиметріи. Подобно этимъ угламъ двугранные углы могутъ быть смежные, прямые, вертикальные...

**341. Теоремы.** 1°. *Равнымъ двуграннымъ угламъ соответствуютъ равные линейные углы.*

2°. *Большему двугранному углу соответствуетъ болѣе большой линейный уголъ.*



Черт. 245

Пусть  $PABQ$  и  $P_1A_1B_1Q_1$  будутъ двугранные углы съ линейными углами  $CBD$  и  $C_1B_1D_1$ . Вложимъ уголъ  $A_1B_1$  въ уголъ  $AB$  такъ, чтобы у нихъ совпали: во 1, точки  $B$  и  $B_1$ ; во 2, ребра  $A_1B_1$  и  $AB$ , и въ 3, грани  $P_1$  и  $P$ .

При этомъ также совпадутъ и плоскости линейныхъ угловъ, такъ какъ онѣ перпендикулярны къ одной прямой въ одной точкѣ. Положимъ, теперь, что налпи двугранные углы равны: тогда грань  $Q_1$  совпадетъ съ  $Q$  и, слѣд., уголь  $C_1B_1D_1$  совмѣстится съ угломъ  $CBD$ , т.-е. эти линейные углы окажутся равными. Если же двугранные углы неравны, напр. уголь  $A_1B_1$  меньше угла  $AB$ , то грань  $Q_1$  пойдетъ внутри угла  $AB$ , напр., займетъ положеніе  $Q_{11}$ . Тогда линейный уголь  $C_1B_1D_1$  займетъ положеніе  $C_{11}B_1D_1$  и, слѣд., будетъ меньше линейнаго угла  $CBD$ .

**342. Обратныя теоремы.** 1°. *Равнымъ линейнымъ угламъ соответствуютъ равные двугранные углы.*

2°. *Большему линейному углу соответствуетъ большій двугранный уголь.*

Эти теоремы легко доказываются отъ противнаго (48).

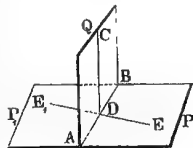
**343. Замѣчаніе.** Наложеніе, или, лучше сказать, вложеніе одной фигуры въ другую, часто употребляемое въ стереометріи, всегда можетъ быть выполняемо въ такой послѣдовательности: во 1°, совмѣщаемъ какія-нибудь двѣ точки фигуръ; во 2°, какія-нибудь двѣ прямыя, исходящія изъ совпавшихъ точекъ и въ 3°, какія-нибудь двѣ плоскости, исходящія изъ совпавшихъ прямыхъ. Совмѣстятся ли при этомъ другіе элементы фигуръ, зависитъ отъ свойствъ ихъ.

**344. Слѣдствія.** 1°. *Прямому двугранному углу соответствуетъ прямой линейный уголь и обратно.*

Пусть уголь  $PABQ$  будетъ прямой.

Это значитъ, что онъ равенъ смежному углу  $QABP_1$ . Но въ такомъ случаѣ линейные углы  $CDE$  и  $CDE_1$  также равны; а такъ какъ они смежные, то каждый изъ нихъ долженъ быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы  $CDE$  и  $CDE_1$ , то равны и смежные двугр. углы, т.-е. каждый изъ нихъ долженъ быть прямой.

2°. *Прямые двугранные углы равны, потому что у нихъ равны линейные углы.* По той же причинѣ:



Черт. 246

3°. Вертикальные двугранные углы равны.

4°. Двугранные углы съ соответственно параллельными и одинаково направленными гранями равны.

**345. Теорема.** Двугранные углы относятся, как ихъ линейные углы.

При доказательствѣ рассмотримъ особо два случая:



Черт. 247

Поэтому:

$$\frac{\angle CBD}{\angle C_1B_1D_1} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{\text{дв. уг. } AB}{\text{дв. уг. } A_1B_1} = \frac{m}{n}$$

$$\text{Откуда: } \frac{\text{дв. уг. } AB}{\text{дв. уг. } A_1B_1} = \frac{\angle CBD}{\angle C_1B_1D_1}$$

2°. Линейные углы несоизмеримы. Раздѣлимъ уголъ  $C_1B_1D_1$  на  $n$  равныхъ частей. Пусть  $\frac{1}{n}$  этого угла содержится въ уголѣ  $CBD$  болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$  разъ. Тогда приближенное отношеніе угловъ  $CBD$  и  $C_1B_1D_1$ , съ точностью до  $\frac{1}{n}$ , будетъ равно  $\frac{m}{n}$ . Проведа плоскости такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, найдемъ, что приближенное отношеніе двугранныхъ угловъ  $AB$  и  $A_1B_1$ , съ точностью до  $\frac{1}{n}$ , также равно  $\frac{m}{n}$ . Такимъ образомъ, приближенные отношенія оказываются равными при всякомъ  $n$ ; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

**346. Слѣдствіе.** Если за единицу двугранныхъ угловъ взять такой уголъ, который соответствуетъ единицѣ линейныхъ



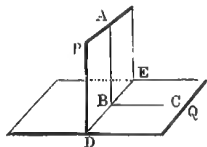
угловъ, то можно сказать, что *дугранный уголъ измѣряется его линейнымъ угломъ*.

## Перпендикулярныя плоскости.

**347. Опреѣленіе.** Двѣ плоскости наз. взаимно перпендикулярными, если пересѣкаясь, онѣ образуютъ прямые двугранные углы.

**348. Теорема.** Плоскость ( $P$ , чер. 248), проходящая черезъ перпендикуляръ ( $AB$ ) къ другой плоскости ( $Q$ ), перпендикулярна къ ней.

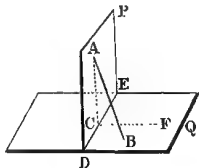
Проведемъ на плоскости  $Q$  прямую  $BC$ , перпендикулярную къ  $DE$ . Тогда уг.  $ABC$  будетъ линейнымъ двугр. угла  $PDEQ$ . Такъ какъ  $AB$ , по условію, перпендикулярна къ  $Q$ , то  $AB \perp BC$ ; значить, уг.  $ABC$  прямой, а потому и двугр. уголъ прямой, т. е. пл.  $P$  перпендикулярна къ  $Q$ .



Черт. 248.

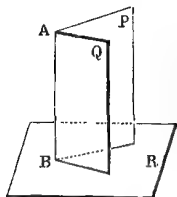
**349. Обратная теорема.** Перпендикуляръ ( $AB$ , чер. 249), имѣющій общую точку ( $A$ ) съ одною изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей ( $P$  и  $Q$ ), лежитъ весь въ этой плоскости.

Предположимъ, что  $AB$  не лежитъ въ плоскости  $P$  (какъ изображено у насъ на чертежѣ). Проведемъ на пл.  $P$  изъ точки  $A$  прямую  $AC$ , перпендикулярную къ  $DE$ , и на пл.  $Q$  изъ точки  $C$  прямую  $CF$ , перпендикулярную къ  $DE$ . Тогда уголъ  $ACF$ , какъ линейный уголъ прямого двугр. угла, будетъ прямой. Поэтому линия  $AC$ , образуя прямые углы съ  $CD$  и  $CF$ , будетъ перпендикуляромъ къ



Черт. 249

пл.  $Q$ . Но изъ точки  $A$  нельзя опустить на плоскость  $Q$  двухъ различныхъ перпендикуляровъ; значить,  $AB$  сливается съ  $AC$ .



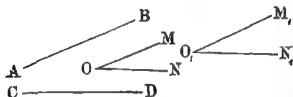
Черт. 251

**350. Теорема.** Пересѣчение ( $AB$ , черт. 251) двухъ плоскостей ( $P$  и  $Q$ ), перпендикулярныхъ къ третьей плоскости ( $R$ ), есть перпендикуляръ къ этой плоскости.

Черезъ какую-нибудь точку  $A$  линии пересѣченія вообразимъ перпендикуляръ къ пл.  $R$ . Этотъ перпендикуляръ долженъ лежать и въ пл.  $Q$  (349), и въ пл.  $R$ ; значить, онъ сольется съ  $AB$ .

## Уголъ двухъ непересѣкающихся прямыхъ.

**351. Опредѣленіе.** Угломъ двухъ непересѣкающихся пря-



Черт. 252

мыхъ  $AB$  и  $CD$ , которыхъ дано положеніе и направленіе, наз. уголъ  $MON$ , который получится, если изъ произвольной точки пространства  $O$  проведемъ прямыя  $OM$  и  $ON$ , соответственно

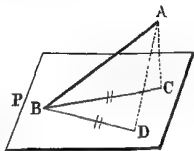
параллельныя прямымъ  $AB$  и  $CD$  и одинаково съ ними направленныя.

Величина угла  $MON$  не зависитъ отъ положенія точки  $O$ . Въ самомъ дѣлѣ, если построимъ указаннымъ путемъ уголъ  $M_1O_1N_1$  при какой-нибудь другой точкѣ  $O_1$ , то  $MON = M_1O_1N_1$ , такъ какъ эти углы имѣютъ соответственно параллельныя и одинаково направленныя стороны.

## Уголъ прямой съ плоскостью.

**352. Определеіе.** Когда прямая  $AB$  наклонна къ плоскости  $P$ , то уголъ ея съ этою плоскостью называютъ уголъ  $ABC$ , составленный наклонною  $AB$  съ ея проекціей  $BC$ .

Этотъ уголъ есть *наименшій* изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости  $P$  через основаніе наклонной. Докажемъ, напр., что  $\angle ABC$  меньше  $\angle ABD$ . Для этого отложимъ  $BD=BC$  и соединимъ  $D$  съ  $A$ . У тр.-ковъ  $ABC$  и  $ABD$  двѣ стороны одного равны соотвѣтственно двумъ сторонамъ другого, но третьи стороны не равны, а именно  $AD > AC$  (наклонная больше перпендикуляра). Вслѣдствіе этого  $\angle ABD$  больше  $\angle ABC$  (54).

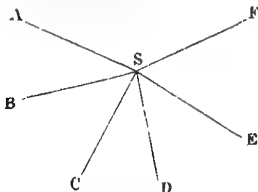


Черт. 253

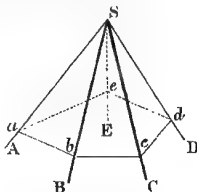
## ГЛАВА V.

### Многогранные углы.

**353. Определеія.** Возьмемъ нѣсколько угловъ (черт. 254):  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $CSD$ ...., которые расположены въ одной



Черт. 254



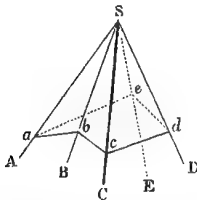
Черт. 255

плоскости вокругъ общей вершины  $S$ . Повернемъ уголъ  $ASB$

вокругъ общей стороны  $SB$  такъ, чтобы плоскость  $ASB$  составила нѣкоторый двугранный уголъ съ пл.  $BSC$ . Затѣмъ, не измѣняя получившагося двуграннаго угла, повернемъ его вокругъ прямой  $SC$  такъ, чтобы пл.  $BSC$  составила нѣкоторый двугр. уголъ съ пл.  $CSD$ . Продолжаемъ такое послѣдовательное вращеніе вокругъ каждой общей стороны. Если при этомъ послѣдняя сторона  $ST$  совмѣстится съ первою стороною  $SA$ , то образуется фигура (черт. 255), называемая *многограннымъ угломъ*. Углы  $ASB, BSC...$  наз. *плоскими углами* или *гранями*, стороны ихъ  $SA, SB...$  наз. *ребрами*, а общая вершина  $S$  — *вершиною* многограннаго угла. Каждому ребру соответствуетъ двугр. уголъ; поэтому въ многогранномъ углѣ столько двугранныхъ угловъ и столько плоскихъ, сколько въ немъ всѣхъ реберъ. Наименьшее число граней въ многогр. углѣ три; такой уголъ наз. *треграннымъ*. Могутъ быть углы четырехгранные, пятигранные и т. д.

Многогранный уголъ (черт. 255) обозначается или одною буквою  $S$ , поставленною у вершины, или же рядомъ буквъ  $SABCDE$ , изъ которыхъ первая обозначаетъ вершину, а прочія — ребра по порядку ихъ расположенія.

Многогранный уголъ наз. *выпуклымъ*, если онъ весь расположенъ по одну сторону отъ каждой своей грани. Таковъ уголъ, изображенный на черт. 255. Наоборотъ, уголъ на черт. 256 нельзя назвать выпуклымъ, такъ какъ онъ расположенъ по обѣ стороны отъ грани  $ASB$ , или грани  $BSC$ . Если всѣ грани многогр. угла пересѣчь плоскостью, то въ сѣченіи образуется многоугольникъ  $(abcde$ , черт. 255 и 256). Въ выпукломъ углѣ этотъ многоугольникъ тоже выпуклый.



Черт. 255

Мы будемъ рассматривать только выпуклые многогранные углы.

**354. Теорема.** Въ *треграннымъ* углѣ каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ.

Пусть въ углѣ  $SABC$  наибольшій изъ плоскихъ угловъ

будетъ  $ASC$ . Докажемъ, что даже этотъ наибольшій уголъ меньше суммы двухъ остальныхъ. Отложимъ на углу  $ASC$  часть  $ASD$ , равную  $ASB$ . Проведемъ въ плоскости угла  $ASC$  какую-нибудь прямую  $AC$ , пересекающую  $SD$  въ точкѣ  $D$ . Отложимъ  $SB=SD$ . Соединивъ  $B$  съ  $A$  и  $C$ , получимъ  $\triangle ACB$ , въ которомъ:

$$AD + DC < AB + BC$$

Тр.-ки  $ASD$  и  $ASB$  равны, такъ какъ они содержатъ по равному углу, заключенному между равными сторонами; слѣд.  $AD = AB$ . Поэтому въ выведенномъ неравенствѣ можно отбросить равныя части  $AD$  и  $AB$ , послѣ чего получимъ:

$$DC < BC$$

Теперь замѣчаемъ, что у тр.-ковъ  $SCD$  и  $SCB$  двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого, а третьи стороны неравны; въ такомъ случаѣ противъ большей изъ этихъ сторонъ лежитъ большій уголъ; значить:

$$\text{уголъ } CSD < \text{угла } CSB$$

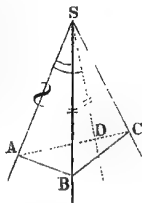
Приложивъ къ лѣвой части этого неравенства уголъ  $ASD$ , а къ правой равный ему уголъ  $ASB$ , получимъ неравенство, которое требовалось доказать:

$$\text{уг. } ASC < \text{уг. } ASB + \text{уг. } OSB.$$

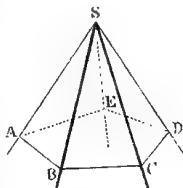
**353. Теорема.** Въ выпукломъ многогранномъ углу сумма плоскихъ угловъ меньше  $4d$ .

Пересѣчемъ грани выпуклаго угла  $SABCDE$  какою-нибудь плоскостью; отъ этого въ сѣченіи получимъ выпуклый  $n$ -угольникъ  $ABCDE$ . Примѣняя теорему предыдущаго параграфа къ каждому изъ трехгранныхъ угловъ, образовавшихся при точкахъ  $A, B, C, D$  и  $E$ , находимъ:

$$ABC < ABS + SBC; BCD < BCS + SCD; \dots\dots$$



Черт. 257



Черт. 258

Сложимъ почленно всё эти неравенства. Тогда въ лѣвой части получимъ сумму всѣхъ угловъ многоугольника  $ABCDE$ , которая равна  $2dn - 4d$  (85), а въ правой — сумму угловъ тр.-ковъ  $ASB, BSC, \dots$ , кромѣ тѣхъ угловъ, которые лежатъ при вершинѣ  $S$ . Обозначая сумму этихъ послѣднихъ угловъ буквою  $x$ , мы получимъ послѣ сложения:

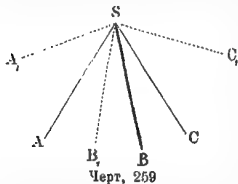
$$2dn - 4d < 2dn - x$$

Откуда:

$$x < 4d$$

### Равенство трехгранныхъ угловъ.

**356. Дополнительный уголъ.** Изъ вершины  $S$  трехграннаго угла  $SABC$  возставимъ къ грани  $ASB$  перпендикуляръ  $SC_1$ , направляя его въ ту сторону отъ этой грани, въ которой расположено противоположное ребро  $SC$ . Подобно этому проведемъ перпендикуляръ  $SA_1$  къ грани  $BSC$  и  $SB_1$  къ грани  $ASC$ . Трехгранный уголъ, у котораго ребрами служатъ прямыя  $SA_1, SB_1$  и  $SC_1$ , наз. *дополнительнымъ* для угла  $SABC$ .



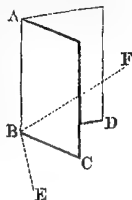
Замѣтимъ, что если для угла  $SABC$  дополнительнымъ служить уг.  $SA_1B_1C_1$ , то и наоборотъ: для уг.  $SA_1B_1C_1$  дополнительнымъ

будетъ  $SABC$ . Дѣйствительно, плоскость  $SA_1B_1$ , проходя черезъ перпендикуляры къ плоскостямъ  $BSC$  и  $ASC$ , перпендикулярна къ нимъ обѣимъ, а слѣд. и къ линіи ихъ пересѣченія  $SC$ ; значитъ, прямая  $SC$  есть перпендикуляръ къ грани  $SA_1B_1$  и, кромѣ того, она расположена по ту же сторону отъ этой грани, по которую лежитъ противоположное ребро  $SC_1$ . Подобно этому убѣдимся, что прямыя  $SB$  и  $SA$  соответственно перпендикулярны къ гранямъ  $SA_1C_1$  и  $SB_1C_1$  и расположены по ту сторону отъ нихъ, по которую лежатъ ребра  $SB_1$  и  $SA_1$ . Значитъ, углы  $SABC$  и  $SA_1B_1C_1$  взаимно дополнительные.

**357. Лемма 1.** Если два трехгранные угла взаимно дополнительны, то плоскіе углы одного служатъ дополненіемъ до  $2d$  къ противоположнымъ двуграннымъ угламъ другого.

Каждый плоскій уголъ одного изъ взаимно дополнительныхъ трехгранныхъ угловъ образованъ двумя перпендикулярами, возстановленными къ

гранямъ противоположнаго двуграннаго угла другого треграннаго, изъ одной точки его ребра. Замѣтить это и приять во вниманіе направленіе перпендикуляровъ, возьмемъ какой-нибудь двугранный уголъ  $AB$  и изъ произвольной точки  $B$  его ребра возставимъ перпендикуляры:  $BE$  къ грани  $AD$  и  $BF$  къ грани  $AC$  и затѣмъ черезъ  $BE$  и  $BF$  вообразимъ плоскость, которая должна быть перпендикулярна къ ребру  $AB$  (348, 350). Пусть пересѣченія этой плоскости съ гранями угла  $AB$  будутъ прямыя  $BC$  и  $BD$ . Тогда уголъ  $CBD$  долженъ быть линейнымъ угломъ двуграннаго  $AB$ . Такъ какъ стороны угла  $EBF$  соответственно перпендикулярны къ сторонамъ угла  $CBD$ , и эти углы не равны, то сумма ихъ равна  $2d$  (82); что и требуется доказать.



Черт. 260

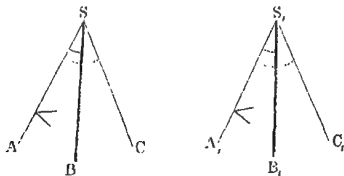
**358. Лемма 2.** Равнымъ треграннымъ угламъ соответствуютъ равные дополнительные углы и обратно.

Равные треграннѣе углы при вложеніи совмѣщаются; поэтому совмѣщаются и тѣ перпендикуляры, которые образуютъ ребра дополнительныхъ угловъ; значить, дополнительные углы также совмѣщаются.

Обратно: если совмѣщаются дополнительные углы, то совмѣщаются и данные углы.

**359. Теоремы.** Трегранные углы равны, если они имѣютъ:

- 1°, по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами;
- или 2°, по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами;
- или 3°, по тремъ соответственно равнымъ и одинаково расположеннымъ плоскимъ угламъ;



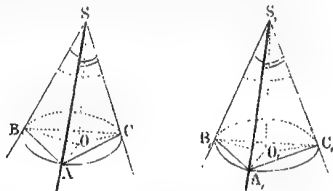
Черт. 261

или 4°, по тремъ соответственно равнымъ и одинаково расположеннымъ двуграннымъ угламъ.

19. Пусть  $S$  и  $S_1$  два треугольные угла (черт. 261), у которых:  $\angle ASB = \angle A_1S_1B_1$ ,  $\angle ASC = \angle A_1S_1C_1$  и двугр. уг.  $AS =$  двугр. уг.  $A_1S_1$ . Вложимъ уголъ  $S_1$  въ уголъ  $S$  такъ, чтобы у нихъ совпали: точка  $S_1$  съ  $S$ , прямая  $S_1A_1$  съ  $SA$  и плоскость  $A_1S_1B_1$  съ  $ASB$ . Тогда ребро  $S_1B_1$  пойдетъ по  $SB$  (по равенству угловъ  $A_1S_1B_1$  и  $ASB$ ), плоскость  $A_1S_1C_1$  пойдетъ по  $ASC$  (по равенству двугранныхъ угловъ), и ребро  $S_1C_1$  по  $SC$  (по равенству угловъ  $A_1S_1C_1$  и  $ASC$ ). Такимъ образомъ, трехгранные углы совмѣстятся во всѣхъ своихъ частяхъ, т.-е. они будутъ равны.

20. Второй признакъ доказывается вложениемъ подобно первому.

30. Пусть  $S$  и  $S_1$  (черт. 262) будутъ два трехгранные углы, у которыхъ плоскіе углы одного равны соответственно плоскимъ угламъ другого, и кромѣ того, равные углы одинаково расположены.



Черт. 262

Отложимъ на всѣхъ ребрахъ произвольные, но равные, отрезки:  $SA = SB = SC = S_1A_1 = \dots$  и построимъ тр.-ки  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Изъ равенства тр.-ковъ  $ABS$  и  $A_1B_1S_1$  находимъ:  $AB = A_1B_1$ . Подобно этому изъ равенства другихъ боковыхъ тр.-ковъ выводимъ:  $AC = A_1C_1$  и  $BC = B_1C_1$ . Слѣд.,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Опустимъ на плоскости этихъ тр.-ковъ перпендикуляры  $SO$  и  $S_1O_1$ . Такъ какъ наклонныя  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  равны, то должны быть равны ихъ проекціи  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ ; значитъ, точка  $O$  есть центръ круга, описаннаго около тр.-ка  $ABC$ . Точно также точка  $O_1$  есть центръ круга, описаннаго около тр.-ка  $A_1B_1C_1$ . У равныхъ тр.-ковъ радиусы описанныхъ круговъ равны; значитъ,  $OB = O_1B_1$ . Поэтому  $\triangle SBO = \triangle S_1B_1O_1$  (по гипотенузѣ и катету), и, слѣд.,  $OS = O_1S_1$ . Вложимъ теперь фигуру  $S_1A_1B_1C_1$  въ фигуру  $SABC$  такъ, чтобы равные тр.-ки  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  совмѣстились; тогда совмѣстятся описанныя окружности, и, слѣд., ихъ центры  $O_1$  и  $O$ ; вслѣдствіе этого перпендикуляръ  $O_1S_1$  пойдетъ по  $OS$ , и точка  $S_1$  упадетъ въ  $S$ . Такимъ образомъ трехгранные углы совмѣстятся всѣми своими частями, т.-е. они будутъ равны.

40. Четвертый признакъ легко доказывается при помощи дополнителныхъ угловъ. Если у двухъ трехгранныхъ угловъ соответственно равны и одинаково расположены двугранные углы, то у нихъ дополнительныхъ угловъ будутъ соответственно равны и одинаково расположены плоскіе

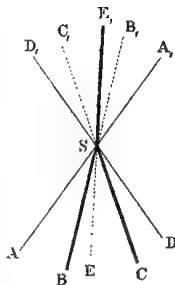


углы (357); слѣд., дополнительные углы равны; а если равны дополнительные, то равны и данные углы (358).

**360. Симметричные многогранные углы.** Какъ извѣстно, вертикальные углы равны, если рѣчь идетъ объ углахъ, образованныхъ прямыми или плоскостями.

Посмотримъ, применима ли эта истина къ угламъ многограннымъ.

Продолжимъ всѣ ребра угла  $SABCDE$  за вершину; тогда образуется другой многогранный уголъ  $SA_1B_1C_1D_1E_1$ , который можно назвать *вертикальнымъ* по отношенію къ первому углу. Не трудно видѣть, что у обонхъ угловъ равны соответственно и плоскіе углы, и двугранные; но тѣ и другіе расположены въ *обратномъ* порядкѣ. Дѣйствительно, если мы вообразимъ наблюдателя, который смотритъ извнѣ многограннаго угла на его вершину, то ребра  $SA, SB, SC, SD, SE$  будутъ казаться ему расположенными противъ движенія часовой стрѣлки, тогда какъ, смотря на уголъ  $SA_1B_1C_1D_1E_1$ , онъ увидитъ ребра  $SA_1, SB_1, \dots$  расположенными по движенію часовой стрѣлки.



Черт. 263

Многогранные углы съ соответственно равными плоскими и двугранными углами, но расположенными въ обратномъ порядкѣ, вообще не могутъ совмѣститься приложеніи; значить, они не равны. Такіе углы называются *симметричными*.

## КНИГА II. МНОГОГРАННИКИ.

### ГЛАВА I.

#### Свойства параллелоипеда и пирамиды.

**361. Многогранникъ.** Многогранникомъ наз. тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями. Многоугольники, образованные пересѣченіемъ этихъ плоскостей, наз. *гранями*, ихъ стороны—*ребрами*, а вершины—*вершинами* многогран-

ника. Прямая, соединяющая двѣ какія-нибудь вершины, не прилежащія къ одной грани, наз. *диагональю*.

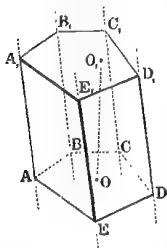
Мы будемъ разсматривать только *выпуклые* многогранники, т. е. такіе, которые расположены по одну сторону отъ каждой своей грани.

Наименьшее число граней въ многогранникѣ четыре; такой многогранникъ получается отъ пересѣченія трехграннаго угла какою-нибудь плоскостью.

**342. Призма.** Призмой наз. многогранникъ, у котораго двѣ грани—равные многоугольники съ отвѣтственно параллельными сторонами, а всѣ остальные грани—параллелограммы.

Чтобы показать возможность существованія такого многогранника, возьмемъ какой-нибудь многоугольникъ  $ABCDE$  и черезъ его вершины проведемъ рядъ параллельныхъ прямыхъ, не лежащихъ въ его плоскости. Взявъ затѣмъ на одной изъ этихъ прямыхъ произвольную точку  $A_1$ , проведемъ черезъ нее плоскость, параллельную плоскости  $ABCDE$ ; черезъ каждыя двѣ послѣдовательныя параллельныя прямыя также проведемъ плоскости. Пересѣченіе всѣхъ этихъ плоскостей опредѣлитъ многогранникъ  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ , удовлетворяющій опредѣленію призмы. Дѣйствительно, параллельныя плоскости  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  пересѣкаются боковыми плоскостями по параллельнымъ прямымъ (332); поэтому фигуры  $AA_1E_1E$ ,  $EE_1D_1D$  и т. д. параллелограммы. Съ другой стороны у многоугольниковъ  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  равны соответственно стороны (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ) и углы (какъ углы съ параллельными и одинаково направленными сторонами); слѣд., эти многоугольники равны.

Параллельныя многоугольники  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  наз. *основаніями* призмы; перпендикуляръ  $OO_1$ , опущенный изъ какой-нибудь точки одного основанія на другое, наз.



Черт. 264

*высотой* призмы. Параллелограммы наз. *боковыми гранями* призмы, а их стороны, соединяющія соответственные вершины оснований—*боковыми ребрами*. У призмы всё боковыя ребра равны, какъ отрёзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между параллельными плоскостями.

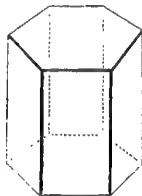
Призма наз. *прямой* или *наклонной*, смотря потому, будутъ ли ея боковыя ребра перпендикулярны или наклонны къ основаніямъ. У прямой призмы боковыя грани суть прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

Прямая призма наз. *правильною*, если ея основанія правильные многоугольники. У такой призмы всё боковыя грани суть равные прямоугольники (черт. 265).

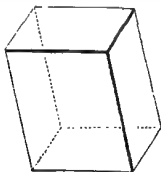
Призмы бываютъ: треугольныя, четырехугольныя и т. д., смотря по тому, лежитъ ли въ основаніи треугольникъ, четырехугольникъ и т. д.

**363. Параллелепипедъ.** Такъ называютъ призму, у которой основаніями служить параллелограммы (черт. 266).

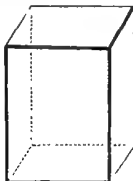
Параллелепипеды могутъ быть прямые и наклонные. Прямой параллелепипедъ наз. *прямоугольнымъ*, если его основанія прямоугольники (черт. 267).



Черт. 265



Черт. 266



Черт. 267

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ:

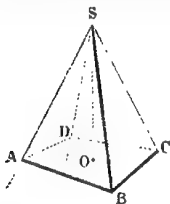
1°, у параллелепипеда всё шесть граней параллелограммы.

2°, у прямого параллелоипеда четыре боковыя грани прямоугольники.

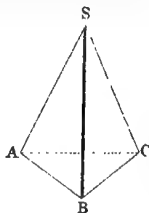
3°, у прямоугольнаго параллелоипеда всѣ грани прямоугольники.

Три ребра прямоугольнаго параллелоипеда, сходящіяся въ одной вершинѣ, наз. его *измѣреніями*; одно изъ нихъ можно разсматривать, какъ длину, другое, какъ ширину, а третье, какъ высоту. Прямоугольный параллелепипедъ, имѣющій равныя измѣренія, наз. *кубомъ*. У куба всѣ грани — квадраты.

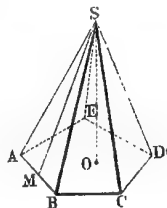
**364. Пирамида.** Это есть многогранникъ, у котораго одна грань, называемая *основаніемъ*, есть какой-нибудь многоугольникъ, а всѣ остальные грани, называемыя *боковыми*, — треугольники, имѣющіе общую вершину.



Черт. 268



Черт. 269



Черт. 270

Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный уголъ  $S$  (черт. 268) пересѣчь произвольною плоскостью  $ABCD$ .

Общая вершина  $S$  боковыхъ треугольниковъ наз. *вершиною* пирамиды, а перпендикуляръ  $SO$ , опущенный изъ вершины на основаніе, — *высотой* ея.

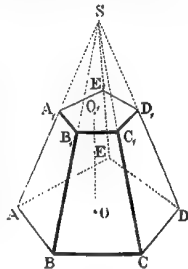
Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишутъ сначала ту, которая поставлена у вершины; напр.:  $SABCD$  (черт. 268).

Пирамиды бываютъ: треугольныя, четырехугольныя и т. д., смотря по тому, лежитъ ли въ основаніи треугольникъ, четырехугольникъ и т. д. Треугольная пирамида (черт. 269)

наз. иначе *тетраэдром*; у такой пирамиды всё четыре грани треугольники.

Пирамида наз. *правильною* (черт. 270), если ея основаніе есть правильный многоугольникъ, и высота проходитъ черезъ центръ этого многоугольника. Въ правильной пирамидѣ всё боковыя ребра равны между собою (какъ наклонныя съ равными проеціями). Поэтому всё боковыя грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные тр.-ки. Высота  $SM$  (черт. 270) какого либо одного изъ этихъ тр.-ковъ наз. *апотемою*. Всё апотемы въ одной пирамидѣ равны.

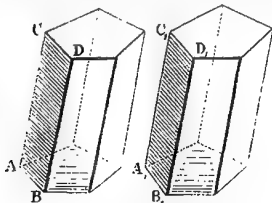
**365. Усѣченная пирамида.** Отрѣзокъ пирамиды, заключенный между основаніемъ  $ABCDE$  и сѣкущею плоскостью  $A_1B_1C_1D_1E_1$ , параллельною основанію, наз. *усѣченною пирамидою*. Параллельные многоугольники наз. *основаніями*, а разстояніе между ними  $OO_1$  — *высотой*. Усѣченная пирамида наз. *правильною*, если она составляетъ отрѣзокъ правильной пирамиды.



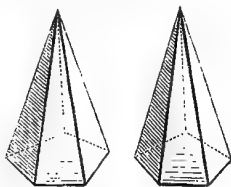
Черт. 271

### Равенство призмъ и пирамидъ.

**366. Теорема.** Две призмы или две пирамиды равны, если основаніе и боковая грань одной и основаніе и боковая грань другой соответственно равны, одинаково наклонены и одинаково расположены.



Черт. 272



Черт. 273

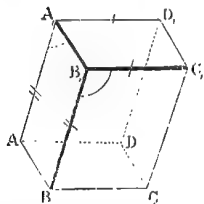
Пусть въ двухъ призмахъ соответственно равны и одинаково распо-

ложены основанія и боковыя грани  $AD$  и  $A_1D_1$ , и сверхъ того равны двугранные углы  $AB$  и  $A_1B_1$ . Вложимъ одну призму въ другую такъ, чтобы у нихъ совпали равныя основанія. Тогда, по равенству двугр. угловъ, грань  $A_1D_1$  пойдетъ по  $AD$ , и такъ какъ эти грани равны и одинаково расположены, то онѣ совпадутъ; по тогда совпадутъ и верхнія основанія (какъ параллельныя и равныя нижнимъ основаніямъ), т.-е. призмы совмѣстятся.

То же доказательство примѣняется и къ пирамидамъ (черт. 273).

## Свойства граней и діагоналей параллелепипеда.

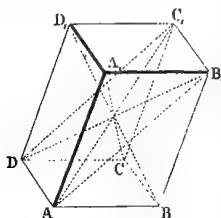
**367. Теорема.** *Въ параллелепипедѣ противоположныя грани равны и параллельны.*



Черт. 271

Такъ, грани  $BB_1C_1C$  и  $AA_1D_1A$  параллельны, потому что двѣ пересекающіяся прямыя  $BB_1$  и  $B_1C_1$  одной грани параллельны двумъ пересекающимся прямымъ  $AA_1$  и  $A_1D_1$  другой (331, 2°); эти грани и равны, такъ какъ  $B_1C_1 = A_1D_1$ ,  $B_1B = A_1A$  (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ) и  $\angle BB_1C_1 = \angle AA_1D_1$  (338).

**368. Теорема.** *Въ параллелепипедѣ діагонали пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней пополамъ.*



Черт. 275

Возьмемъ въ параллелепипедѣ  $AC_1$  какія-нибудь двѣ діагонали, напр.  $AC_1$  и  $DB_1$ , и проведемъ прямыя  $AB_1$  и  $DC_1$ . Такъ какъ ребра  $AD$  и  $B_1C_1$  соответственно равны и параллельны ребру  $BC$ , то они равны и параллельны между собою; вслѣдствіе этого фигура  $ADC_1B_1$  есть параллелограммъ (97, 2°), въ которомъ  $AC_1$  и  $DB_1$  — діагонали; а въ параллелограммѣ діагонали пересѣка-

ются пополамъ.

Это доказательство можно повторить о каждойъ двухъ

диагоналям; поэтому диагональ  $AC_1$  пересѣкается съ  $BD_1$  пополамъ, диагональ  $BD_1$  пересѣкается съ  $A_1C$  пополамъ; такимъ образомъ, всѣ четыре діагонали пересѣкаются пополамъ, и слѣд. въ одной точкѣ.

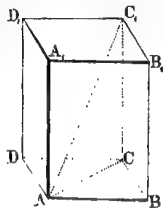
**369. Теорема.** Въ прямоугольномъ параллелепипеде квадраты діагоналей равны суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній.

Пусть  $AC_1$  есть діагональ прямоугольнаго параллелепипеда. Проведя  $AC$ , получимъ два тр.-ка:  $AC_1C$  и  $ACB$ . Оба они прямоугольные: первый потому, что параллелепипедъ прямой, и, слѣд., ребро  $CC_1$  перпендикулярно къ основанію; второй потому, что параллелепипедъ прямоугольный, значитъ, въ основаніи его лежитъ прямоугольникъ. Изъ этихъ тр.-ковъ находимъ:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \text{ и } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

$$\text{Слѣд. } AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

**370. Слѣдствіе.** Въ прямоугольномъ параллелепипеде всѣ діагонали равны.



Черт. 276

**Свойства параллельныхъ сѣченій въ пирамидѣ.**

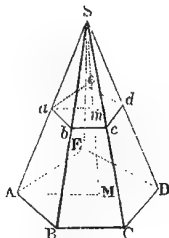
**371. Теоремы.** Если пирамида (черт. 277) пересѣчена плоскостью, параллельною основанію, то:

1°, боковыя ребра и высота дѣлятся этою плоскостью на части пропорціанальныя;

2°, въ сѣченіи получается многоугольникъ ( $abcde$ ), подобный основанію;

3°, площади сѣченія и основанія относятся, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины.

1°. Прямая  $ab$  и  $AB$  можно разсматривать, какъ пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей (основанія и сѣкущей) третьей плоскостью  $ASB$ ; поэтому  $ab \parallel AB$



Черт. 277

(332). По той же причинѣ  $bc \parallel BC, cd \parallel CD..$  и  $am \parallel AM$ ; вслѣд-  
ствие этого (192).

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \dots = \frac{Sm}{mM}$$

2°. Изъ подобія тр.-ковъ  $ASB$  и  $aSb$ , ватѣмъ  $BSC$  и  $bSc$   
и т. д., выводимъ:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BS}{bS}; \frac{BS}{bS} = \frac{BC}{bc}; \text{ откуда: } \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$$

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CS}{cS}; \frac{CS}{cS} = \frac{CD}{cd}; \text{ откуда: } \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$$

Такъ же докажемъ пропорціональность остальныхъ сто-  
ронъ мн.-ковъ  $ABCDE$  и  $abcde$ . Такъ какъ, сверхъ того,  
у этихъ мн.-ковъ равны соотвѣтственно углы (какъ образо-  
ванные параллельными и одинаково направленными сторонами),  
то они подобны.

3°. Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся, какъ  
квадраты сходственныхъ сторонъ; поэтому:

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2$$

$$\text{Но } \frac{AB}{ab} = \frac{AS}{aS} = \frac{MS}{mS}$$

$$\text{Значитъ: } \frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} = \left(\frac{MS}{mS}\right)^2 = \frac{MS^2}{mS^2}$$

**332. Слѣдствие.** У правильной усѣченной пирамиды  
верхнее основаніе есть правильный многоугольникъ, а боко-  
вые грани суть равныя и равнобочныя трапеціи (см. черт.  
271).

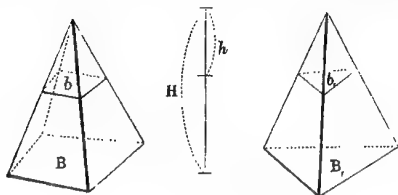
Высота какой-нибудь изъ этихъ трапецій наз. апофемой  
прав. усѣч. пирамиды.

**333. Теорема.** Если двѣ пирамиды съ равными вы-  
сотами разсѣчены на одинаковомъ разстояніи отъ вершины  
плоскостями, параллельными основаніямъ, то площади сѣ-  
ченій пропорціональны площадямъ основаній.

Пусть  $B$  и  $B_1$  будутъ площади основаній двухъ пира-



мидъ,  $H$  высота каждой изъ нихъ,  $b$  и  $b_1$  площади сѣченій плоскостями, параллельными основаніямъ и удаленными отъ



Черт. 278

вершинъ на одно и то же разстояніе  $h$ . Согласно предыдущей теоремѣ мы будемъ имѣть:

$$\frac{b}{B} = \frac{h^2}{H^2} \quad \text{и} \quad \frac{b_1}{B_1} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\text{Откуда:} \quad \frac{b}{B} = \frac{b_1}{B_1}$$

**334. Слѣдствіе.** Если  $B = B_1$ , то и  $b = b_1$ , т. е. если у двухъ пирамидъ съ равными высотами основанія равновелики, то равновелики и сѣченія, равноотстоящія отъ вершины.

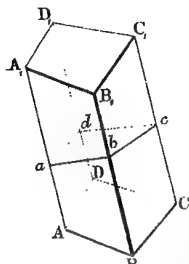
## ГЛАВА II.

### Боковая поверхность призмы и пирамиды.

**335. Теорема.** Боковая поверхность призмы равна произведенію периметра перпендикулярнаго сѣченія на боковое ребро.

Перпендикулярнымъ сѣченіемъ (черт. 279) наз. многоугольникъ  $abcd$ , получаемый отъ пересѣченія призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ. Стороны этого многоугольника перпендикулярны къ ребрамъ.

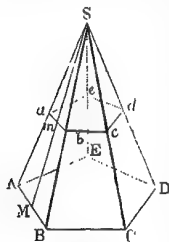
Боковая поверхность призмы есть сумма площадей параллелограммовъ; въ каждомъ изъ нихъ за основаніе можно взять боковое ребро, а за высоту сторону перпендикулярнаго сѣченія. Поэтому:



Черт. 279

перпендикулярное сѣченіе можно взять само основаніе, а боковое ребро ся равно высотѣ.

**377. Теорема.** Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведенію периметра основанія на половину апогея.



Черт. 280

Пусть  $SABCDE$  есть прав. пирамида и  $SM$  ея апогея. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равныхъ равнобедренныхъ тр.-ковъ. Площадь одного изъ нихъ, напр.  $ASB$ , равна  $AB \cdot \frac{1}{2} SM$ . Если всѣхъ тр.-ковъ  $n$ , то боковая поверхность выразится  $(AB \cdot n) \cdot \frac{1}{2} SM$ , гдѣ  $AB \cdot n$  есть периметръ основанія, а  $SM$  апогея.

**378. Теорема.** Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведенію полусуммы периметровъ обоихъ основаній на апогея.

Эта поверхность есть сумма площадей равныхъ трапецій. Площадь одной изъ нихъ, напр.  $AabB$  (черт. 280) равна  $\frac{1}{2} (AB + ab) \cdot Mm$  (280). Если число всѣхъ трапецій есть  $n$ , то

$$\text{бок. пов.} = \frac{AB + ab}{2} \cdot Mm \cdot n = \frac{AB \cdot n + ab \cdot n}{2} \cdot Mm$$

гдѣ  $AB.n$  и  $ab.n$  суть периметры нижняго и верхняго оснований.

### З а д а ч и.

327. Высота прямой призмы, которой основаніе есть правильный треугольникъ, равна 12 метрамъ, а сторона основанія 3 метр. Вычислить полную поверхность призмы.

328. Полная поверхность прямоугольнаго параллелоипеда равна 1714 кв. футовъ, а неравныя стороны основанія равны 25 и 14. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

329. Въ прямоугольномъ параллелоипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ и высотой  $h$  проведена сѣкущая плоскость черезъ два противоположныя боковыя ребра. Вычислить полную поверхность параллелоипеда, зная, что площадь сѣченія равна  $N$ .

330. Правильная шестигульная пирамида имѣетъ сторону основанія  $a$  и высоту  $h$ . Вычислить боковое ребро, а также, боковую поверхность и полную поверхность.

331. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно  $a$ .

332. Правильная шестигульная пирамида, у которой высота 25 сантим., а сторона основанія 5 сантим., разсѣчена плоскостью, параллельною основанію. Вычислить разстояніе этой плоскости отъ вершины пирамиды, зная, что площадь сѣченія  $= 10\sqrt{3}$  квадр. сантим.

333. Высота усѣченной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ равна  $h$ , сторона нижняго основанія  $a$ , а верхняго  $b$ . Найти полную поверхность усѣч. пирамиды.

334. Высота усѣченной пирамиды равна 6, а площади основаній 18 и 8. Пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною основаніямъ, и дѣлящею высоту пополамъ. Вычислить площадь сѣченія

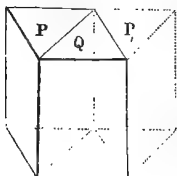
## ГЛАВА III.

### Объемъ призмы и пирамиды.

**339. Объемъ.** Объемомъ геометрическаго тѣла наз. величина той части пространства, которую занимаетъ это тѣло.

Равныя тѣла, т. е. совмѣщающіяся при вложеніи, имѣютъ и равные объемы. Но и неравныя тѣла могутъ имѣть одинаковые объемы. Если, напр., мы разрѣжемъ діагональною плоскостью параллелоипедъ (черт. 281) на части  $P$  и  $Q$  и затѣмъ часть

$P$  приложимъ къ  $Q$  такъ, чтобы она заняла положеніе  $P_1$ , то получимъ другой параллелепипедъ, не равный первому, но имѣющій съ нимъ одинаковый объемъ.



Черт. 282

Два тѣла, у которыхъ объемы одинаковы, наз. *равновеликими*.

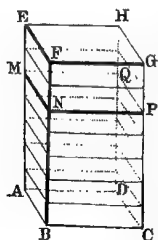
**380. Единица объема.** За единицу объема берутъ объемъ такого куба, у котораго измѣреніе равно линейной единицѣ. Такъ, употребительны: куб. аршинъ, куб. метръ и т. п. Замѣтимъ что куб. метръ наз. иначе *стеръ*, а куб. дециметръ — *литръ*.

### Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда.

**381. Лемма 1.** Объемы прямоугольных параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся, какъ ихъ высоты.

Если прямоугол. параллелепипеды имѣютъ равныя основанія, то ихъ можно вложить одинъ въ другой. Пусть  $AG$  и  $AP$  (черт. 282) будутъ такіе два параллелепипеда. Рассмотримъ два случая.

1°. Высоты  $BF$  и  $BN$  соизмѣримы. Пусть общая мѣра высотъ содержится  $m$  разъ въ  $BF$  и  $n$  разъ въ  $BN$ . Проведемъ черезъ точки дѣленія рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію. Тогда пар.-дъ  $AG$  раздѣлится на  $m$ , а пар.-дъ  $AP$  на  $n$  равныхъ частей; такимъ образомъ мы получимъ:



Черт. 282

$$\frac{BF}{BN} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{\text{Объемъ } AG}{\text{Объемъ } AP} = \frac{m}{n}$$

Слѣд.:  $\frac{\text{Объемъ } AG}{\text{Объемъ } AP} = \frac{BF}{BN}$

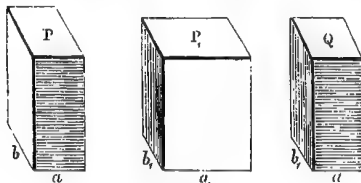
2°. Высоты  $BF$  и  $BN$  несоизмѣримы. Раздѣлимъ  $BN$  на  $n$  равныхъ частей и одну часть отложимъ на  $BF$  столько разъ, сколько можно. Пусть  $\frac{1}{n}$  доля  $BN$  содержится въ  $BF$  болѣе  $m$  разъ, но менѣе  $m+1$  разъ. Тогда, проведя

по прежнему рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію, мы раздѣлимъ пар.-дѣ  $AP$  на  $n$  такихъ равныхъ частей, какихъ въ пар.-дѣ  $AG$  содержится болѣе  $m$ , но менѣе  $m+1$ . Слѣд.:

$$\text{приб. отн. } \frac{BF'}{BN} = \frac{m}{n} \quad \text{и приб. отн. } \frac{\text{об. } AG}{\text{об. } AP} = \frac{m}{n}$$

Такимъ образомъ, приближенныя отношенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью, равны; а въ этомъ и состоитъ равенство несоизмѣримыхъ отношеній.

**382. Лемма 2.** *Объемы прямоугльных параллелепипедовъ, имеющихъ равныя высоты, относятся, какъ площади ихъ основаній.*



Черт. 283.

Пусть  $P$  и  $P_1$  два прямоугльные параллелепипеда. Обозначимъ неравныя стороны основанія одного изъ нихъ черезъ  $a$  и  $b$ , а другого черезъ  $a_1$  и  $b_1$ . Возьмемъ вспомогательный прямоугльный пар.-дѣ  $Q$ , у котораго высота такая же какъ у данныхъ тѣлъ, а основаніемъ служить прямоугльникъ со сторонами  $a$  и  $b_1$ . У пар.-довъ  $P$  и  $Q$  переднія грани (покрытыя на чертежѣ горизонтальными штрихами) равны. Если примемъ эти грани за основанія, то высоты будутъ  $b$  и  $b_1$ , и слѣд. (381):

$$\frac{\text{Объемъ } P}{\text{Объемъ } Q} = \frac{b}{b_1} \quad [1]$$

У пар.-довъ  $Q$  и  $P_1$  боковыя грани (покрытыя на чертежѣ вертикальными штрихами) равны. Если примемъ эти грани за основанія, то высоты будутъ  $a$  и  $a_1$ , и слѣд.:

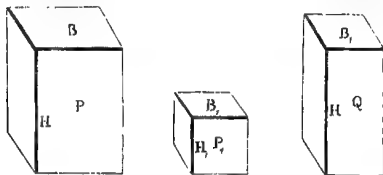
$$\frac{\text{Объемъ } Q}{\text{Объемъ } P_1} = \frac{a}{a_1} \quad [2]$$

Перемноживъ равенства [1] и [2], найдемъ:

$$\frac{\text{Объемъ } P}{\text{Объемъ } P_1} = \frac{ab}{a_1b_1}$$

Такъ какъ  $ab$  выражаетъ площадь основанія пар.-да  $P$ , а  $a_1b_1$  — площадь основанія пар.-да  $P_1$ , то лемма доказана.

**383. Теорема.** Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.



Черт. 284

Пусть  $P$  есть прямоугольный параллелепипедъ, а  $P_1$  — какая нибудь кубическая единица. Обозначимъ площадь основанія и высоту перваго черезъ  $B$  и  $H$ , а втораго черезъ  $B_1$  и  $H_1$ . Возьмемъ вспомогательный прямоугольный пар.-дъ  $Q$ , у котораго площадь основанія  $B_1$ , а высота  $H$ . Сравнивая  $P$  съ  $Q$ , а затѣмъ  $Q$  съ  $P_1$ , находимъ (382 и 381):

$$\frac{\text{Об. } P}{\text{Об. } Q} = \frac{B}{B_1} \quad \text{и} \quad \frac{\text{Об. } Q}{\text{Об. } P_1} = \frac{H}{H_1}$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ:

$$\frac{\text{Об. } P}{\text{Об. } P_1} = \frac{B}{B_1} \cdot \frac{H}{H_1}$$

Отношенія, входящія въ это равенство, суть числа, выражающія объемъ, площадь основанія и высоту даннаго параллелепипеда въ соответствующихъ кубическихъ, квадратныхъ и линейныхъ единицахъ; поэтому послѣднее равенство можно высказать такъ:

Число, выражающее объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, равно произведенію чиселъ, выражающихъ площадь основанія и высоту въ соответствующихъ единицахъ.

Это выражают сокращенно такъ: объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту, т. е.

$$V=BH$$

гдѣ подѣ  $V$ ,  $B$  и  $H$  разумѣются числ., выражающія въ соотвѣствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту прямоугольнаго параллелепипеда.

Обозначая буквами  $a$ ,  $b$  и  $c$  три измѣренія прим. пар.-да (выраженные въ числахъ), можемъ написать:

$$V=abc$$

потому что площадь основанія выражается произведеніемъ двухъ изъ этихъ измѣреній, а высота равна трѣтьему измѣренію.

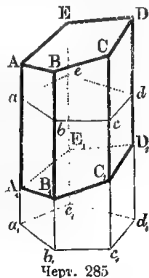
**384. Слѣдствія.** 1°. Объемъ куба равенъ третьей степени его ребра.

2°. Отношеніе двухъ куб. единицъ равно третьей степени отношенія соотвѣствующихъ линейныхъ единицъ; такъ, отношеніе куб. метра къ куб. дециметру равно  $10^3$ , т. е. 1000.

### Объемъ всякаго параллелепипеда.

**385. Лемма.** Наклонная призма равновелика такой прямой призмой, у которой основаніе равно перпендикулярному снѣженію наклонной призмы, а высота—ея боковому ребру.

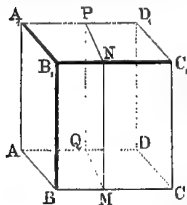
Черезъ какую нибудь точку  $a$  одного изъ боковыхъ реберъ наклонной призмы  $A_1D$  проведемъ перпендикулярное снѣченіе  $abcde$ . Затѣмъ, продолживъ всѣ боковыя грани внизъ, отложимъ  $aa_1=AA_1$  и черезъ точку  $a_1$  проведемъ перпендикулярное снѣченіе  $a_1b_1c_1d_1e_1$ . Такъ какъ плоскости двухъ снѣченій параллельны, то части боковыхъ реберъ, заключенныя между ними, равны, т. е.  $bb_1=cc_1=dd_1=ee_1=aa_1=AA_1$  (336). Вслѣдствіе этого многогранникъ  $a_1d$  есть прямая призма, у которой основаніемъ служитъ перпендикулярное снѣченіе, а высота (или, что все равно, боковое ребро) равно боковому ребру наклонной призмы. Докажемъ, что наклонная призма равновелика



этой прямой. Для этого предварительно убедимся, что многогранники  $aD$  и  $a_1D_1$  равны. Основания их  $abcde$  и  $a_1b_1c_1d_1e_1$  равны, какъ основания призмы  $a_1d_1$ ; съ другой стороны, изъ равенства  $A_1A=a_1a$  слѣдуетъ:  $A_1A-A_1a=a_1a-A_1a$ , т. е.  $aA=a_1A_1$ ; подобно этому:  $bB=B_1b_1$ ,  $cC=c_1C_1$  и т. д. Вообразимъ теперь, что многогранникъ  $aD$  вложенъ въ  $a_1D_1$  такъ, чтобы основанія ихъ совпали; тогда боковыя ребра, будучи перпендикулярны къ основаніямъ и соответственно равны, также совпадутъ; поэтому многогранникъ  $aD$  совмѣстится съ  $a_1D_1$ , значить, эти тѣла равны. Теперь замѣтимъ, что если отъ цѣлаго многогранника  $a_1D_1$  отнимемъ часть  $aD$ , то получимъ прямую призму; а если отъ того же многогранника отнимемъ часть  $a_1D_1$ , то получимъ наклонную призму. Изъ этого слѣдуетъ, что эти двѣ призмы равновелики.

**286. Теорема.** *Объемъ параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.*

Сначала мы докажемъ эту теорему для параллелепипеда *прямого*, а потомъ и *наклоннаго*.



Черт. 286

1°. Пусть  $AC_1$  будетъ прямой пар.-дъ, т.-е. такой, у котораго основаніе  $ABCD$  есть параллелограммъ, а всѣ боковыя грани — прямоугольники. Возьмемъ въ немъ за основаніе грань  $AA_1B_1B$ ; тогда параллелепипедъ будетъ *наклонный*. Согласно леммѣ предыдущаго §, этотъ пар.-дъ равновеликъ такому прямому, у котораго основаніе есть перпендикулярное сѣченіе  $MNPQ$ , а высота  $BC$ . Четыреугольникъ  $MNPQ$  есть прямоугольникъ, потому что его углы служатъ линейными углами прямыхъ двугранныхъ угловъ; поэтому прямой пар.-дъ, имѣющій это основаніе, долженъ быть *прямоугольнымъ*, и, слѣд., его объемъ равенъ произведенію площади основанія  $MNPQ$  на высоту  $BC$ . Но площадь  $MNPQ$  равна  $MN \cdot MQ$ ; значить:

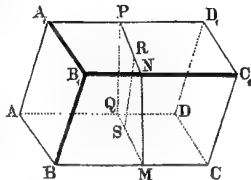
$$\text{Объемъ } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC$$



Произведение  $MQ \cdot BC$  выражает площадь параллелограмма  $ABCD$ ; поэтому:

$$\text{Объемъ } AC_1 = (\text{плоч. } ABCD) \cdot MN$$

2°. Пусть  $AC_1$  будетъ нар.-дъ наклонный. Онъ равно-великъ такому прямому, у котораго основаніе есть перпендикулярное сѣченіе  $MNPQ$ , а высота  $BC$ . Но, по доказанному, объемъ прямого параллелоипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту; значить:



Черт. 287

$$\text{Объемъ } AC_1 = (\text{плоч. } MNPQ) \cdot BC$$

Если  $RS$  есть высота сѣченія  $MNPQ$ , то площадь  $MNPQ = MQ \cdot RS$ ; поэтому:

$$\text{Объемъ } AC_1 = MQ \cdot RS \cdot BC$$

Произведение  $BC \cdot MQ$  выражает площадь параллелограмма  $ABCD$ ; слѣд.

$$\text{Объемъ } AC_1 = (\text{плоч. } ABCD) \cdot RS$$

т.-е. объемъ всякаго параллелоипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.

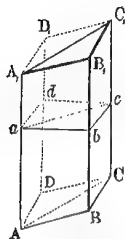
**387. Слѣдствіе.** Если  $V$ ,  $B$  и  $H$  суть числа, выражающія въ соотвѣствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту какого ни на есть параллелоипеда, то можемъ писать:

$$V = BH$$

### Объемъ призмъ.

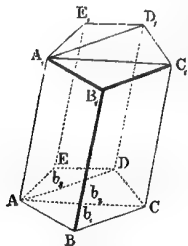
**388. Теорема.** Объемъ призмы равенъ произведенію площади основанія на высоту.

Сначала докажемъ эту теорему для треугольной призмы, а потомъ для многоугольной.



Черт. 288

1°. Проведемъ черезъ ребро  $AA_1$  треугольной призмы  $AC_1$  плоскость, параллельную грани  $BB_1C_1C$ , а черезъ ребро  $CC_1$  плоскость, параллельную грани  $AA_1B_1B$ ; затѣмъ продолжимъ плоскости обоихъ оснований призмы до пересѣченія съ рѣзѣ проведенными плоскостями. Тогда мы получимъ параллелепипедъ  $BD_1$ , который діагональною плоскостью  $AA_1C_1C$  дѣлится на двѣ треугольныя призмы (изъ нихъ одна есть данная). Докажемъ, что эти призмы равновелики. Для этого проведемъ перпендикулярное сѣченіе  $abcd$ . Въ сѣченіи получится параллелограммъ, который діагональю  $ac$  дѣлится на два равныя тр.-ка. Данная призма равновелика такой прямой, у которой основаніе есть  $\triangle abc$ , а высота — ребро  $AA_1$  (385). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основаніе есть  $\triangle adc$ , а высота — ребро  $AA_1$ . Но двѣ призмы призмы съ равными основаніями и равными высотами равны (потому что при вложеніи онѣ совмѣщаются); значитъ, призмы  $ABCA_1B_1C_1$  и  $ADCA_1D_1C_1$  равновелики. Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ данной призмы составляетъ половину объема параллелепипеда  $BD_1$ ; поэтому, обозначая высоту черезъ  $H$ , получимъ (386):



Черт. 289

2°. Проведемъ черезъ ребро  $AA_1$  данной многоугольной призмы (черт. 289) и черезъ всѣ остальные боковыя ребра, кромѣ двухъ ближайшихъ, плоскости  $AA_1C_1C$  и  $AA_1D_1D$ . Тогда данная призма разсѣ-

$$\begin{aligned} \text{Об. тр. призмы} &= \frac{1}{2} (\text{плоч. } ABCD) H \\ &= \left( \frac{1}{2} \text{плоч. } ABCD \right) H = (\text{плоч. } ABC) H \end{aligned}$$

честя на пѣсконыхъ треугольныхъ призмъ. Сумма объемовъ этихъ призмъ составитъ искомый объемъ. Если обозначимъ площади изъ основаній черезъ  $b_1, b_2, b_3$ , а общую высоту черезъ  $H$ , то получимъ:

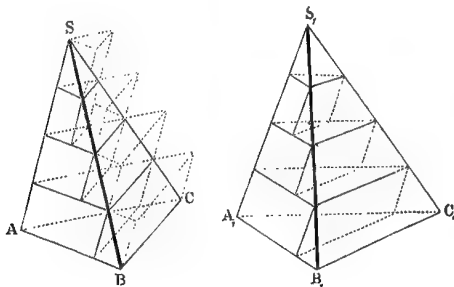
$$\begin{aligned}\text{Объемъ мп. призмъ} &= b_1 H + b_2 H + b_3 H = (b_1 + b_2 + b_3) H \\ &= (\text{пл. } ABCDE) H\end{aligned}$$

**389. Слѣдствіе.** Если  $V$ ,  $B$  и  $H$  будутъ числа, выражающія въ соотвѣтственныхъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту призмъ, то, по доказанному, можемъ писать:

$$V = BH.$$

### Объемъ пирамиды.

**390. Лемма.** *Треугольная пирамида съ равновеликими основаніями и равными высотами равновелика.*



Черт. 200

Раздѣлимъ высоту каждой изъ данныхъ пирамидъ на произвольное число  $n$  равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію (на чертѣ высота, а слѣд. и боковыя ребра, раздѣлены на 4 равными частями). Такъ какъ, по условію, основанія  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$

равновелики, то тр.-ки, получившіеся въ сѣченіяхъ одной пирамиды, соответственно равновелики тр.-камъ, получившимся въ сѣченіи другой пирамиды (374). Построимъ теперь въ каждой пирамидѣ рядъ внутреннихъ призмъ такихъ, чтобы верхними основаніями у нихъ были треугольники сѣченій, боковыя ребра были параллельны ребру  $SA$  въ одной пирамидѣ и ребру  $S_1A_1$  въ другой, а высота каждой призмы равнялась бы  $1/n$  высоты пирамиды. Такихъ призмъ въ каждой пирамидѣ будетъ  $n-1$ . Объемы призмъ пирамиды  $S$  обозначимъ по порядку, начиная отъ вершины, черезъ  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}$ , а объемы призмъ пирамиды  $S_1$ , также по порядку отъ вершины, черезъ  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}$ .

Тогда:

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3, \dots, p_{n-1} = q_{n-1}$$

потому что у каждой пары соответственныхъ призмъ основанія равновелики и высоты равны. Поэтому:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{n-1}$$

Предположимъ теперь, что  $n$ , т.-е. число равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ высоту пирамидъ, неограниченно возрастаетъ. Тогда обѣ части послѣдняго равенства сдѣлаются величинами переменными. Докажемъ, что каждая изъ нихъ стремится въ предѣлѣ къ объему той пирамиды, въ которую призмы вписаны. Это достаточно доказать для какой-нибудь одной пирамиды, напр. для  $S$ . Для этого построимъ въ ней рядъ призмъ, выходящихъ частью изъ пирамиды, такихъ, чтобы нижними основаніями ихъ служили треугольники сѣченій (и основаніе пирамиды), высоты были бы равны, по прежнему,  $1/n$  высоты пирамиды, а боковыя ребра параллельны тому же ребру  $SA$ . Такихъ призмъ будетъ  $n$ . Обозначимъ ихъ объемы, начиная отъ вершины пирамиды, по порядку, черезъ  $p_1', p_2', p_3', \dots, p_{n-1}', p_n'$ . Не трудно видѣть, что

$$p_1' = p_1, p_2' = p_2, p_3' = p_3, \dots, p_{n-1}' = p_{n-1}$$

Поэтому:

$$(p_1' + p_2' + p_3' + \dots + p_{n-1}' + p_n') - \\ (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}) = p_n'$$

Если объемъ пирамиды обозначимъ черезъ  $V$ , то очевидно, что:

$$p_1' + p_2' + p_3 + \dots + p_n' > V > p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$$

Откуда:  $V - (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}) < p_n'$

При неограниченномъ увеличеніи числа  $n$  объемъ призмы  $p_n$  стремится къ нулю (потому что высота ея стремится къ нулю, а основаніе не измѣняется); слѣд. разность  $V - (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1})$  и подавно стремится къ нулю; а это, по опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$V = \text{пред. } (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1})$$

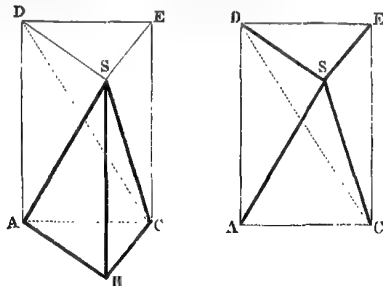
Подобно этому можно доказать, что  $V_1$ , т.-е. объемъ пирамиды  $S_1$ , есть предѣлъ переменнѣйшей суммы  $q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}$ .

Но если двѣ переменныя величины, имѣющія предѣлы, всегда остаются равными, то равны и ихъ предѣлы (248); поэтому:

$$V = V_1$$

что и требовалось доказать.

**§91. Теорема.** Объемъ пирамиды равенъ произведенію площади основанія на третью высоты.



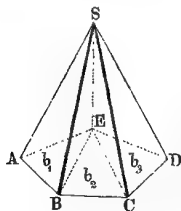
Черт. 291

Сначала докажемъ эту теорему для пирамиды треугольной, а затѣмъ многоугольной.

1°. На основаніи треугольной пирамиды  $SABC$  построим такую призму  $ABCDSE$ , у которой высота равна высоте пирамиды, а одно боковое ребро совпадает съ ребромъ  $SB$ . Теперь докажемъ, что объемъ пирамиды составляетъ третью часть объема этой призмы. Отдѣлимъ отъ призмы данную пирамиду. Тогда останется четырехугольная пирамида  $SADEC$ , (которая для ясности изображена отдѣльно). Проведемъ въ ней сѣкущую плоскость черезъ вершину  $S$  и діагональ основанія  $DC$ . Получившіяся отъ этого двѣ треугольныя пирамиды имѣютъ, общую вершину  $S$  и равныя основанія  $DEC$  и  $DAC$ , лежація въ одной плоскости: значить, согласно доказанной выше леммѣ, пирамиды  $SDEC$  и  $SDAC$  равновелики. Сравнимъ одну изъ нихъ, напр.  $SDEC$ , съ данной пирамидой. За основаніе пирамиды  $SDEC$  можно взять  $\triangle SDE$ ; тогда вершина ея будетъ въ точкѣ  $C$ , и высота равна высотѣ данной пирамиды. Такъ какъ  $\triangle SDE = \triangle ABC$ , то, согласно той же леммѣ, пирамиды  $CSDE$  и  $SABC$  равновелики. Такимъ образомъ, сумма объемовъ трехъ пирамидъ, равновеликихъ данной, составляетъ объемъ призмы; слѣд.

$$\text{Об. } SABC = \frac{1}{3} \text{ об. } SDEABC = (\text{пл. } ABC) \frac{H}{3}$$

гдѣ  $H$  означаетъ высоту пирамиды.



Черт. 292

2°. Черезъ какую-нибудь вершину  $E$  основанія многоугольной пирамиды  $SABCDE$  проведемъ діагонали  $EB$  и  $EC$ . Затѣмъ черезъ ребро  $SE$  и каждую изъ этихъ діагоналей проведемъ сѣкущія плоскости. Тогда многоугольная пирамида разобьется на нѣсколько треугольныхъ, имѣющихъ высоту, общую съ данной пирамидой. Обозначивъ площади основаній треугольныхъ пирамидъ черезъ  $b_1, b_2, b_3$  и высоту черезъ  $H$ , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \text{Объемъ } SABCDE &= \frac{1}{3} b_1 H + \frac{1}{3} b_2 H + \frac{1}{3} b_3 H \\ &= (b_1 + b_2 + b_3) \frac{H}{3} = (\text{пл. } ABCDE) \frac{H}{3} \end{aligned}$$

**392. Слѣдствіе.** Если  $V$ ,  $B$  и  $H$  означаютъ числа, выражающія въ соответственныхъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту какой угодно пирамиды, то

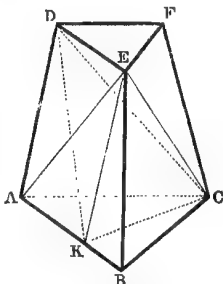
$$V = \frac{1}{3} BH.$$

**Объемъ усѣченной пирамиды и усѣченной призмы.**

**393. Теорема.** Объемъ усѣченной пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту одинаковую съ высотой усѣченной пирамиды, а основаніями: одна—нижнее основаніе усѣченной пирамиды, другая—верхнее основаніе этой пирамиды, а третья—среднее пропорціональное между ними.

Сначала докажемъ эту теорему для треугольной пирамиды, а потомъ многоугольной.

1°. Пусть  $ABCDEF$  есть усѣченная треугольная пирамида. Отдѣлимъ отъ нея сѣкущую плоскостью  $AEC$  треугольную пирамиду  $EABC$ . Эта пирамида, имѣя основаніе  $ABC$  и вершину въ  $E$ , удовлетворяетъ требованію теоремы. Оставшаяся часть есть четырехугольная пирамида  $EADFC$ . Проведя въ ней сѣкущую плоскость черезъ точки  $E$ ,  $D$  и  $C$ , мы раздѣлимъ ее на двѣ треугольныя пирамиды. Изъ нихъ одна имѣетъ основаніемъ  $\triangle DEF$ , т. е. верх-



Черт. 293

нее основаніе усѣченной пирамиды, а вершину въ точкѣ  $C$ ; слѣд., эта пирамида удовлетворитъ требованію теоремы. Остается разсмотрѣть третью пирамиду  $EADC$ . Превратимъ ее въ другую равновеликую пирамиду слѣдующимъ образомъ. Проведемъ прямую  $EK \parallel DA$  и точку  $K$  примемъ за вершину новой пирамиды, которой основаніемъ оставимъ тотъ же треугольникъ  $ADC$ . Пирамиды  $EADC$  и  $KADC$  равновелики, потому что у нихъ общее основаніе  $ADC$  и высоты равны

(такъ какъ вершины лежатъ на прямой  $EK$ , параллельной плоскости основанія). Примемъ за вершину новой пирамиды точку  $D$ , а за основаніе  $\triangle ACK$ . Тогда высота ея будетъ равна высотѣ усѣченной пирамиды. Остается доказать, что основаніе  $ACK$  есть средняя пропорціанальная величина между  $ABC$  и  $DEF$ , т. е. что

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } ACK} = \frac{\text{пл. } ACK}{\text{пл. } DEF}$$

У тр.-ковъ  $ABC$  и  $ACK$  за основанія можно взять стороны  $AB$  и  $AK$ ; тогда вершина у нихъ будетъ общая  $C$ , и, слѣд., высоты будутъ одинаковы; поэтому:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } ACK} = \frac{AB}{AK} = \frac{AB}{DE} \quad [1]$$

(вмѣсто  $AK$  можно взять равный отрѣзокъ  $DE$ ).

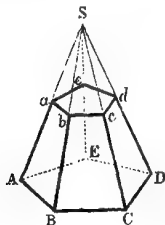
Треугольники  $ACK$  и  $DEF$  имѣютъ по равному углу при вершинахъ  $A$  и  $D$ ; поэтому (289):

$$\frac{\text{пл. } ACK}{\text{пл. } DEF} = \frac{AC \cdot AK}{DF \cdot DE} = \frac{AC}{DF} \quad [2]$$

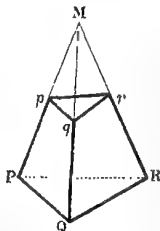
(отрѣзки  $AK$  и  $DE$ , какъ равные, сокращаются).

Изъ подобія тр.-ковъ  $ABC$  и  $DEF$  слѣдуетъ, что правыя части равенствъ [1] и [2] равны; слѣд., равны и ихъ лѣвыя части, т. е.

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } ACK} = \frac{\text{пл. } ACK}{\text{пл. } DEF}$$



Черт. 294



2°. Возьмемъ теперь многоугольную усѣченную пирамиду  $Ad$ , составляющую часть полной пирамиды  $SABCDE$ . Превратимъ мн. - къ  $ABCDE$  въ равновеликій тр.-къ  $PQR$  и, принявъ этотъ тр.-къ за

основаніе, построимъ вспомогательную пирамиду  $MPQR$  съ такой же высотой, какъ у пирамиды  $S$ . Пересѣчемъ пирамиду  $M$  плоскостью  $pqr$ , параллельною основанію, на такомъ



разстояніи отъ вершины, на какомъ въ пирамидѣ  $S$  проведена плоскость  $abcde$ . Въ сѣченіи получится  $\triangle pqr$ , равновеликій мн.-ку  $abcde$  (374). Пирамиды  $SABCDE$  и  $MPQR$  равновелики, такъ какъ у нихъ равновелики основанія и высоты равны; по той же причинѣ пирамиды  $Sabcde$  и  $Mpqr$  тоже равновелики; отсюда слѣдуетъ, что усѣч. многоугольная пирамида  $Ad$  равновелика усѣч. треугольной пирамидѣ  $Pr$ ; такъ какъ у этихъ двухъ усѣченныхъ пирамидъ основанія, и нижнее, и верхнее, соответственно равновелики, а высоты равны, то теорема, доказанная для усѣченной треугольной пирамиды, остается примѣнимой и къ многоугольной.

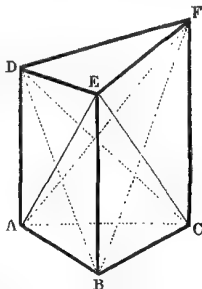
**394. Слѣдствіе.** Пусть  $V$ ,  $B$ ,  $b$  и  $H$  будутъ числа, выражающія въ соответствующихъ единицахъ объемъ, площадь нижняго основанія, площадь верхняго основанія и высоту усѣченной пирамиды; тогда

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bH + \frac{1}{3}H\sqrt{Bb} = \frac{1}{3}H(B + b + \sqrt{Bb})$$

гдѣ  $\sqrt{Bb}$  есть величина, средняя пропорціоная между  $B$  и  $b$ .

**395. Теорема.** Объемъ треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общее основаніе съ усѣченной призмой, а вершины въ трехъ вершинахъ непараллельнаго сѣченія.

Пусть  $AF$  есть усѣченная треугольная призма. Проведя сѣкущую плоскость черезъ точки  $E$ ,  $A$  и  $C$ , мы отдѣлимъ одну изъ трехъ пирамидъ, указанныхъ въ теоремѣ, именно пирамиду  $EABC$ , имѣющую общее основаніе  $ABC$  съ усѣченной призмой и вершину въ точкѣ  $E$ . Проведемъ еще сѣкущую плоскость черезъ точки  $E$ ,  $D$  и  $C$ ; тогда получимъ двѣ другія пирамиды:  $EDAC$  и  $EDFC$ . Теорема будетъ доказана, если мы обнаружимъ, что эти пирамиды равновелики такимъ, у которыхъ основаніемъ служитъ  $\triangle ABC$ , а вершины лежатъ:



Черт. 295

одной въ  $D$ , другой въ  $F$ . Дѣйствительно: пирамиды  $EDAC$  и  $DABO$  равновелики, потому что за основаніе ихъ можно взять общій тр.-къ  $DAC$ , и тогда вершины  $E$  и  $B$  будутъ лежать на прямой  $BE$ , параллельной плоскости основаній; пирамиды  $EDFC$  и  $FABC$  равновелики, потому что за основанія ихъ можно принять равновеликіе тр.-ки: для первой  $DFC$ , для второй  $AFC$ ; и тогда ихъ вершины  $E$  и  $B$  будутъ лежать на прямой  $BE$ , параллельной плоскости основаній.

**396. Слѣдствіе.** Пусть  $V$ ,  $B$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  будутъ числа, выражающія въ соответствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоты, опущенные на основаніе изъ трехъ вершинъ непараллельнаго сѣченія; тогда

$$V = \frac{1}{3}Bh_1 + \frac{1}{3}Bh_2 + \frac{1}{3}Bh_3 = B \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

Когда призма прямая, высоты  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  равны боковымъ ребрамъ ея.

## ГЛАВА IV.

### Подобіе многогранниковъ.

**397. Определеіе.** Два многогранника наз. *подобными*, если они имѣютъ соответственно равныя многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобныхъ многогранниковъ наз. *сходственными*.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ подобныхъ многогранникахъ:

1°. *Двуугранные углы соответственно равны и одинаково расположены*, потому что многогранные углы равны.

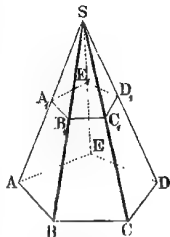
2°. *Сходственные ребра пропорціональны*, потому что въ каждахъ двухъ подобныхъ граняхъ отношеніе сходственныхъ реберъ одно и то же, и въ каждомъ многогранникѣ соотвѣдствія грани имѣютъ по общему ребру.

Возможность существованія подобныхъ многогранниковъ доказывается слѣдующей теоремой:

**398. Теорема.** Если въ пирамидѣ (черт. 296) проведемъ сѣкущую

плоскость  $(A_1B_1C_1D_1E_1)$  параллельно основанию, то отсечем от нее другую пирамиду  $(SA_1B_1C_1D_1E_1)$ , подобную данной.

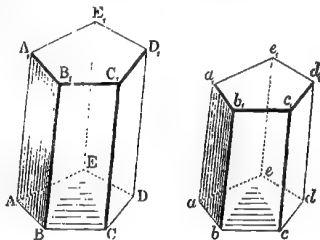
Такъ какъ  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $B_1C_1 \parallel BC$  и т. д. (332), то боковыя грани двухъ пирамидъ подобны; основания ихъ также подобны (371). Остается доказать равенство многогранных угловъ. Уголъ  $S$  у обѣихъ пирамидъ общій; трехгранные углы  $A_1, B_1, C_1, \dots$  равны соответственно угламъ  $A, B, C, \dots$ , потому что у каждой пары этихъ угловъ плоскіе углы соответственно равны и одинаково расположены (359; 3°).



Черт. 296

**339. Теорема.** Две призмы, или две пирамиды, подобны, если основание и боковая грань одной и основание и боковая грань другой соответственно подобны, одинакова наклонены и одинаково расположены.

1°. Пусть у двухъ призмъ будутъ соответственно подобны и одинаково расположены основания  $ABCDE$ ,  $abcde$  и грани  $AA_1B_1B$ ,  $aa_1b_1b$  и кромѣ того равны двугранные углы  $AB$  и  $ab$ . Для доказательства подобія этихъ призмъ, рассуждаемъ въ такой послѣдовательности. Трехгранные углы  $B$  и  $b$  равны, потому что они имѣютъ по равному двугранному углу ( $AB$  и  $ab$ ), заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами ( $ABC = abc$  и  $ABB_1 = abb_1$ ); отсюда слѣдуетъ, что равны плоскіе углы  $B_1BC$  и  $b_1bc$ , а также и двугранные  $BC$  и  $bc$ . Если же у двухъ параллелограммовъ  $BB_1C_1C$  и  $bb_1c_1c$  имѣется по одному равному углу, то и остальные углы ихъ соответственно равны; такъ какъ, сверхъ того,



Черт. 297

$$\frac{BC}{bc} = \frac{AB}{ab} \quad (\text{изъ подобія оснований})$$

$$\text{и } \frac{BB_1}{bb_1} = \frac{AB}{ab} \quad (\text{изъ подобія бок. граней}),$$

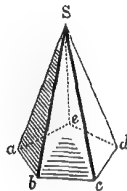
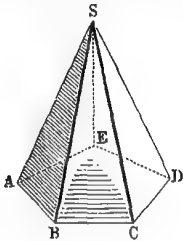
то

$$\frac{BC}{bc} = \frac{BB_1}{bb_1}$$

Значитъ, грани  $BB_1C_1C$  и  $bb_1c_1c$  подобны. Переходя теперь къ трехграннымъ угламъ  $C$  и  $c$ , совершенно также убедимся, что они равны и что

грани  $CC_1D_1D$  и  $cc_1d_1d$  подобны. Такимъ образомъ, мы пероберемъ всѣ трехгранные углы при основаніи и всѣ боковыя грани. Верхнія основанія  $A_1B_1C_1D_1E_1$  и  $a_1b_1c_1d_1e_1$  подобны, потому что они равны нижнимъ основаніямъ; трехгранные углы при верхнихъ основаніяхъ соответственно равны, потому что у нихъ равны и одинаково расположены плоскіе углы. Значитъ, рассматриваемыя призмы подобны.

20. Пусть теперь мы имѣемъ двѣ пирамиды, у которыхъ соответ-

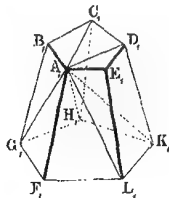
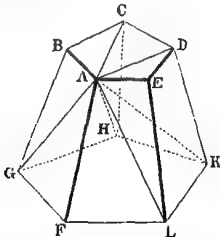


Черт. 298

ственно подобны и одинаково расположены основанія  $ABCDE$ ,  $abcde$  и боковыя грани  $SAB$ ,  $sab$  и кромѣ того равны двугранные углы  $AB$  и  $ab$ . Совершенно такъ, какъ это было сдѣлано для призмъ, мы докажемъ, что всѣ трехгранные углы, прилежащіе къ основаніямъ, соответственно равны, и что всѣ боковыя грани соответствен-

но подобны. Тогда многогранные углы  $S$  и  $s$  также будутъ равны, потому что, имѣя всѣ плоскіе и двугранные углы соответственно равные и одинаково расположенные, они при вложеніи одного въ другой совмѣщаются.

**400. Теорема.** Подобные многогранники могутъ быть разложены на одинаковое число соответственно подобных и одинаково расположенныхъ пирамидъ.



Черт. 299

Указанное въ теоремѣ разложеніе можетъ быть выполнено различными способами. Мы поступимъ такъ.

Возьмемъ въ одномъ изъ данныхъ подобныхъ многогранниковъ вершину  $A$  какого-нибудь многограннаго угла. Возьмемъ далѣе всѣ тѣ грани многогранника, которыя не принадлежатъ къ углу  $A$ . Въ нашемъ многогранникѣ такихъ граней четыре:  $EDKL$ ,  $DOHK$ ,  $CBGH$  и  $FGHKL$ . Каждую изъ этихъ граней примемъ за основаніе такой пирамиды, которой вершина лежала бы въ  $A$ . Тогда многогранникъ разбивается на пирамиды, сходящіяся вершинами въ точку  $A$ . Въ другомъ многогранникѣ возьмемъ сходственную вершину  $A_1$  и тѣмъ же путемъ разложимъ его на одинаковое число пирамидъ. Докажемъ, что эти пирамиды соответственно подобны. И дѣйствительно, какую бы пару соответственныхъ пирамидъ мы не взяли, легко найдемъ, что основаніе и грань одной пирамиды и основаніе и грань другой пирамиды соответственно подобны, одинаково наклонены и одинаково расположены. Напр., у пирамидъ  $ADELK$ ,  $A_1D_1E_1L_1K_1$  основанія  $DELK$ ,  $D_1E_1L_1K_1$  подобны, какъ сходственные грани подобныхъ многогранниковъ, грани  $ADE$ ,  $A_1D_1E_1$  подобны, потому что подобные многоугольники  $ABCDE$ ,  $A_1B_1C_1D_1E_1$  разбиваются на соответственно подобныя тр.-ы; двугранные углы  $DE$ ,  $D_1E_1$  равны, какъ сходственные углы подобныхъ многогранниковъ. Изъ этого слѣдуетъ, что взятыя нами пирамиды подобны. То же самое можно сказать о другихъ пирамидахъ.

**401. Теорема.** *Площасти подобныхъ многогранниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ реберъ.*

Пусть  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  будутъ площади отдѣльныхъ граней одного изъ подобныхъ многогранниковъ, а  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  площади сходственныхъ граней другого; положимъ еще, что  $L$  и  $l$  будутъ длины двухъ какихъ-нибудь сходственныхъ реберъ. Тогда, вслѣдствіе подобія сходственныхъ граней и пропорциональности всѣхъ сходственныхъ реберъ, будемъ имѣть (291):

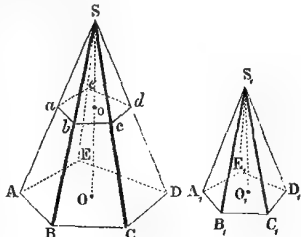
$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_2}{p_2} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_3}{p_3} = \frac{L^2}{l^2}; \dots \quad \frac{P_n}{p_n} = \frac{L^2}{l^2}$$

Откуда:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{L^2}{l^2}$$

**402. Теорема.** *Объемы подобныхъ многогранниковъ относятся, какъ кубы сходственныхъ реберъ.*

10. Сначала докажемъ теорему для подобныхъ пирамидъ. Пусть пирамиды  $SABCDE$  и  $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$  подобны. Вложимъ вторую пирамиду въ первую такъ, чтобы у нихъ совпали равныя многогранные углы  $S$  и  $S_1$ . Тогда основаніе  $A_1B_1C_1D_1E_1$  займетъ въ кото-



Черт. 300

рое положеніе  $abcde$ , причѣмъ стороны  $ab, bc, \dots$  будутъ соответственно параллельны сторонамъ  $AB, BC, \dots$  (вслѣдствіе равенства плоскихъ угловъ трехгранныхъ  $A$  и  $A_1, B$  и  $B_1$  и т. д.); вслѣдствіе этого плоскость  $abcde$  будетъ параллельна  $ABCDE$  (331, 20). Пусть  $SO$  и  $So$  будутъ высоты двухъ пирамидъ. Тогда:

$$\text{Об. } SABCDE = (\text{плоск. } ABCDE) \cdot \frac{1}{3} SO$$

$$\text{Об. } Sabcde = (\text{плоск. } abcde) \cdot \frac{1}{3} So$$

$$\text{Слѣд. } \frac{\text{Об. } SABCDE}{\text{Об. } Sabcde} = \frac{\text{плоск. } ABCDE}{\text{плоск. } abcde} \cdot \frac{SO}{So}$$

$$\text{По } \frac{\text{плоск. } ABCDE}{\text{плоск. } abcde} = \frac{SO^2}{So^2} \quad (371, 30)$$

$$\text{Поэтому: } \frac{\text{об. } SABCDE}{\text{об. } Sabcde} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{SA^3}{Sa^3} = \dots \quad (371, 10)$$

20. Теперь докажемъ теорему для двухъ какихъ угодно подобныхъ многогранниковъ, объемы которыхъ назовемъ  $V$  и  $v$ . Разобьемъ ихъ на подобныя пирамиды (400). Пусть  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  и  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  будутъ объемы сходственныхъ пирамидъ, а  $L$  и  $l$  данныя какихъ-нибудь сходственныхъ реберъ. Тогда, согласно доказанному, будемъ имѣть:

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{L^3}{l^3}; \quad \frac{V_2}{v_2} = \frac{L^3}{l^3}; \quad \dots \quad \frac{V_n}{v_n} = \frac{L^3}{l^3}$$

$$\text{Откуда: } \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} = \frac{L^3}{l^3}$$

$$\text{т.-е. } \frac{V}{v} = \frac{L^3}{l^3}$$

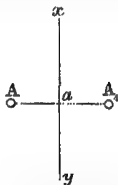
## ГЛАВА V.

### Симметричныя фигуры

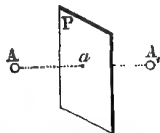
**403. Опредѣленія.** Различаютъ три рода *симметрии*: относительно точки, относительно прямой и относительно плоскости.



Черт. 301



Черт. 302

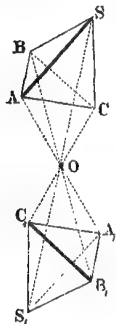


Черт. 303

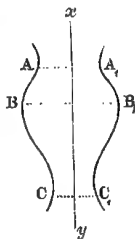
Двѣ точки  $A$  и  $A_1$  (черт. 301) наз. симметричными относительно точ-

ки  $O$  (центра симметрии), если прямая  $AA_1$  проходит через точку  $O$  и делится ею пополамъ. Две точки  $A$  и  $A_1$  (черт. 302 и 303) наз. симметричными относительно прямой  $xy$  (оси симметрии) или относительно плоскости  $P$  (плоскости симметрии), если прямая  $AA_1$  перпендикулярна къ  $xy$  или къ плоскости  $P$  и делится ими пополамъ.

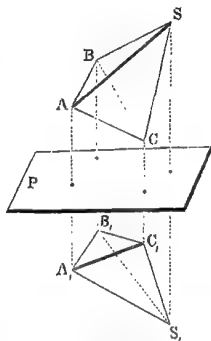
Две фигуры наз. симметричными относительно центра (черт. 304), оси (черт. 305), или плоскости (черт. 306), если каждой точкѣ одной фигуры соответствуетъ симметричная точка другой. Симметричные точки двухъ такихъ фигуръ наз. *соответственными*.



Черт. 304



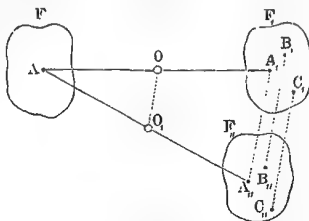
Черт. 305



Черт. 306

**104.** Замѣтимъ прежде всего, что *две фигуры, симметричныя относительно оси, равны*. Въ этомъ убѣдимся, если повернемъ одну изъ фигуръ (черт. 305) вокругъ оси на  $180^\circ$ . Тогда каждая точка  $A$  одной фигуры совпадаетъ съ соответственной точкой  $A_1$  другой фигуры, и, слѣд., обѣ фигуры совпадутся.

**105. Теорема.** *Фигуры, симметричныя съ одной и той же фигурой относительно различныхъ центров, равны.*



Черт. 307

Пусть фигуры  $F_1$  и  $F_2$  симметричны съ одной фигурой  $F$  относительно центров  $O$  и  $O_1$  (черт. 307).





2°. Если будем обращать вниманіе только на *форму* фигуры, а не на ея положеніе въ пространствѣ, то можемъ сказать, что *данная фигура F имѣетъ только единственную симметричную съ нею фигуру* (относительно точки, или относительно плоскости, все равно), такъ какъ всѣ фигуры, симметричныя съ *F*, равны между собою. Вслѣдствіе этого, при изслѣдованіи свойствъ симметричныхъ фигуръ, зависящихъ только отъ ихъ формы, мы можемъ по произволу разсматривать эти фигуры или какъ симметричныя относительно центра, или какъ симметричныя относительно плоскости.

#### 408. Теоремы, выражающія свойства симметричныхъ фигуръ.

1°. *Фигура, симметричная съ плоской фигурой, есть также плоская фигура, равная первой.*

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если возьмемъ за плоскость симметріи плоскость данной фигуры; тогда симметричная фигура сливается съ данной.

Въ частности, фигура, симметричная съ отрезкомъ прямой, есть равный отрезокъ прямой; фигура, симметричная съ угломъ, есть равный уголъ; фигура, симметричная съ плоскимъ многоугольникомъ, есть равный плоскій многоугольникъ; фигура, симметричная съ кругомъ, есть равный кругъ; и т. п.

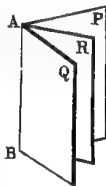
2°. *Фигура, симметричная съ двуграннымъ угломъ ( $PABQ$ , черт. 309), есть равный двугранный уголъ.*

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если за плоскость симметріи возьмемъ *биссектрисную* плоскость *R*. Тогда фигура, симметричная съ гранью *P*, будетъ другая грань *Q*, и наоборотъ; слѣд. фигура, симметричная съ угломъ  $PABQ$ , будетъ уголъ  $QABP$ .

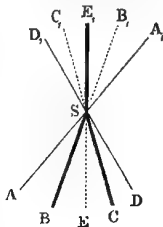
3°. *Фигура, симметричная съ многограннымъ угломъ, ( $SABCDE$  черт. 310), есть многогранный уголъ, у котораго двугранные и плоскіе углы соответственно равны двуграннымъ и плоскимъ угламъ перваго многограннаго угла, но расположены въ обратномъ порядкѣ.*

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если возьмемъ за центръ симметріи вершину *S*. Тогда получимъ два симметричные угла  $SABCDE$  и  $SA_1B_1C_1D_1E_1$ , у которыхъ двугранные и плоскіе углы соответственно равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ (360).

**Слѣдствіе.** Симметричные многогранные углы вообще не равны, такъ какъ, вслѣдствіе обратнаго расположенія равныхъ двугранныхъ угловъ, они не могутъ совмѣститься. По той же причинѣ симметричные многогранники вообще не равны.

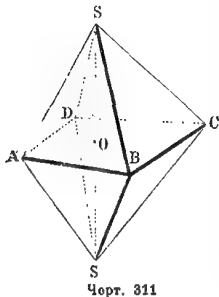


Черт. 309



Черт. 310

49. Два симметричные многогранника равновелики.



Докажем сначала эту теорему для симметричных пирамид  $SABCD$  и  $S_1ABCD$ , которые мы разберем такъ, чтобы плоскостью симметріи служило основаніе  $ABCD$ . Такъ какъ точки  $S$  и  $S_1$  симметричны относительно плоскости основанія, то высоты  $SO$  и  $S_1O$  равны; вслѣдствіе этого пирамиды имѣютъ общее основаніе и равныя высоты, равновелики. Два какіе угодно симметричныя многогранника всегда могутъ быть разложены на одинаковое число симметричныхъ пирамидъ; поему теорема верна и для многогранниковъ произвольной формы.

## ГЛАВА VI.

### Понятіе о правильныхъ многогранникахъ.

**409. Определеіе.** Многогранникъ наз. *правильнымъ*, если всѣ его грани суть равныя правильныя многоугольники и всѣ многогранные углы равны. Изъ этого определенія слѣдуетъ, что въ правильныхъ многогранникахъ равны всѣ плоскіе углы, всѣ двугранные углы и всѣ ребра.

**410.** Чтобы опредѣлить, какіе правильные многогранники могутъ служить гранями правильныхъ многогранниковъ, примемъ во вниманіе, что во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ меньше  $4d$  (355). Каждый уголъ правильнаго треугольника равенъ  $\frac{2}{3}d$ . Повторяя  $\frac{2}{3}d$  слагаемымъ 3 раза, 4 раза и 5 разъ, мы получаемъ суммы, меньшія  $4d$ ; а повторяя  $\frac{2}{3}d$  слагаемымъ большее число разъ, мы получаемъ въ суммѣ  $4d$  или болѣе. Поэтому изъ плоскихъ угловъ, равныхъ угламъ правильнаго тр.-ка, можно образовывать многогранные углы только трехъ видовъ: трехгранные, четырехгранные и пятигранные. Уголъ квадрата равенъ  $d$ , а уголъ правильнаго пятиугольника равенъ  $\frac{6}{5}d$ ; повторяя эти углы слагаемымъ не болѣе 3-хъ разъ, получаемъ суммы,

меньшіа 4 $\bar{d}$ . Поэтому изъ плоскихъ угловъ, равныхъ угламъ квадрата или правильнаго пятиугольника, можно образовать только трехгранные углы. Уголъ правильнаго шестиугольника равенъ  $\frac{2}{3}\bar{d}$ ; поэтому изъ такихъ угловъ нельзя образовать даже трехграннаго угла. Изъ угловъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ болѣе 6-ти сторонъ, и подавно нельзя образовать никакого многограннаго угла.



Черт. 312



Черт. 313



Черт. 314



Черт 315.



Черт 316.

**111.** Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что правильныхъ многогранниковъ не можетъ быть болѣе слѣдующихъ пяти:

1°. *Правильный четырехгранникъ* (или тетраэдръ), котораго поверхность составлена изъ 4-хъ правильныхъ треугольниковъ (черт. 312).

2°. *Правильный восьмигранникъ* (или октаэдръ), котораго поверхность составлена изъ 8-ми правильныхъ тр.-ковъ (черт. 313).

3°. *Правильный двадцатипранникъ* (или икосаэдръ), образованный 20-ю правильными тр.-ками (черт. 315).

4°. *Правильный шестипранникъ* (или гексаэдръ), образованный 4-мя квадратами (черт. 314). Онъ наз. иначе *кубомъ*.

5°. *Правильный двенадцатипранникъ* (или додекаэдръ), образованный 12-ю правильными пятиугольниками (черт. 316).

## ЗАДАЧИ.

335. Вычислить поверхность и объем прямой призмы, у которой основание правильный тр.-к., вписанный в круг радиуса  $r=2$  метрамъ, а высота равна сторонѣ правильного 6-угольника, описаннаго около того же круга.

336. Определить поверхность и объем правильной 8-угольной призмы, у которой высота  $h=6$  арш., а сторона основания  $a=8$  вершк.

337. Определить боковую поверхность и объем прав. шестиугольной пирамиды, у которой высота равна 1 метру, а апогея составляет съ высотой уголъ въ  $30^\circ$ .

338. Вычислить объемъ треуг. пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно  $l$ , а стороны основанія суть  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

339. Данъ трехгранный уголъ  $SABC$ , у котораго все три плоскіе угла прямые. На его ребрахъ отложены длины:  $SA=a$ ,  $SB=b$  и  $SC=c$ . Черезъ точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведена плоскость. Определить объемъ пирамиды  $SABC$ .

340. Высота пирамиды равна  $h$ , а основание—правильный шестиугольникъ со стороною  $a$ . На какомъ разстояніи  $x$  отъ вершины пирамиды слѣдуетъ провести плоскость, параллельную основанію, чтобы объемъ образовавшейся усѣченной пирамиды равнялся  $V$ .

341. Определить объемъ правильного тетраэдра съ ребромъ  $a$ .

342. Определить объемъ прав. октаэдра съ ребромъ  $a$ .

343. Усѣченная пирамида, которой объемъ  $V=1465$  куб. сантим., имѣетъ основаніями правильные шестиугольники со сторонами:  $a=23$  и  $b=17$  сант. Вычислить высоту этой пирамиды.

344. Объемъ  $V$  усѣченной пирамиды равенъ 10,5 куб. метра, высота  $h=1/3$  метр. и сторона  $a$  правильного шестиугольника, служащаго нижнимъ основаніемъ, равна 2 метр. Вычислить сторону прав. шестиугольника, служащаго верхнимъ основаніемъ.

345. Вычислить объемъ треугольной усѣченной призмы, у которой стороны основанія суть:  $a=7,5$ ,  $b=7$  и  $c=6,5$ , а ребра, перпендикулярныя къ основанію, суть:  $h=2$ ,  $l=3$  и  $m=4$ .

346. На какомъ разстояніи отъ вершины  $S$  пирамиды  $SABC$  надо провести плоскость, параллельную основанію, чтобы отношеніе объемовъ частей, на которыя разсѣкается этою плоскостью пирамида, равнялось  $m$ .

347. Вычислить объемъ усѣченнаго параллелепипеда, у котораго основаніе есть  $B$ , а  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  и  $h_4$  суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ верхняго основанія на плоскость нижняго основанія.

348. Пирамида съ высотой  $h$  раздѣлена плоскостями, параллельными основанію, на три части въ отношеніи  $m:n:p$ . Определить разстояніе этихъ плоскостей до вершины пирамиды.

349. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равна  $V$ , а отношеніе сходственныхъ реберъ равно  $m:n$ . Определить объемы ихъ.

350. Раздѣлить объемъ усѣченной пирамиды плоскостью, параллельною основаніямъ  $B$  и  $b$ , на двѣ части въ отношеніи  $m:n$ .

# КНИГА Ш. КРУГЛЫЯ ТѢЛА.

## ГЛАВА I.

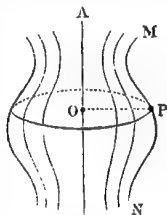
### Цилиндръ и конусъ.

**412. Поверхность вращения.** Такъ наз. поверхность, которая получается отъ вращенія какой-нибудь неизмѣняющейся линіи  $MN$ , называемой *образующей*, вокругъ неподвижной прямой  $AB$ , называемой *осью*; при этомъ предполагается, что образующая  $MN$ , при своемъ вращеніи, неизмѣнно связана съ осью  $AB$ .

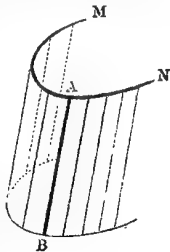
Возьмемъ на образующей какую-нибудь точку  $P$  и опустимъ изъ нея на ось перпендикуляръ  $PO$ . Очевидно, что при вращеніи не измѣняются ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла  $AOP$ , ни положеніе точки  $O$ . Поэтому каждая точка образующей описываетъ окружность, которой плоскость перпендикулярна къ оси и центръ лежитъ на пересѣченіи этой плоскости съ осью. Отсюда слѣдуетъ, что плоскость, перпендикулярная къ оси, пересѣкаясь съ поверхностью вращенія, даетъ въ сѣченіи окружность.

Всякая сѣкущая плоскость, проходящая черезъ ось, наз. *меридианальною* плоскостью, а пересѣченіе ея съ поверхностью вращенія—*меридианомъ*. Всѣ меридіаны равны между собою, потому что при вращеніи каждый изъ нихъ проходитъ черезъ то положеніе, въ которомъ равнѣ былъ всякій другой меридіанъ.

**413. Цилиндрическая поверхность.** Такъ наз. поверхность, производимая дви-

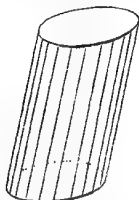


В  
Черт. 317



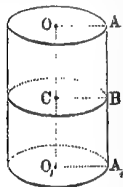
В  
Черт. 318

жепіемъ прямой  $AB$  (черт. 318), перемѣщающейся въ пространствѣ параллельною данному направленію и пересѣкающей при этомъ данную линію  $MN$ . Прямая  $AB$  наз. образующею, а линія  $MN$  направляющею.



Черт. 319

Черт. 318. Цилиндръ наз. *прямымъ* или *наклоннымъ*, смотря по тому, перпендикулярны или наклонны къ основаніямъ его образующія.



Черт. 320

Прямой цилиндръ (черт. 320) наз. *круговымъ*, если его основанія круги. Такой цилиндръ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольника  $OAA_1O_1$  вокругъ стороны  $OO_1$ , какъ оси; при этомъ сторона  $AA_1$  описываетъ боковую поверхность, а стороны  $OA$  и  $O_1A_1$  — круги основаній. Всякая прямая  $BC$ , параллельная  $OA$ , описываетъ также кругъ, перпендикулярный къ оси. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченіе прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельною основаніямъ, есть кругъ. Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой круговой цилиндръ; для краткости его называютъ просто *цилиндромъ*.

Иногда приходится разсматривать такіа прямыя призмы, которыхъ основанія суть многоугольники, вписанные въ основанія цилиндра, или описанные около нихъ; такіа призмы наз. *описанными* въ цилиндръ, или *описанными* около него.

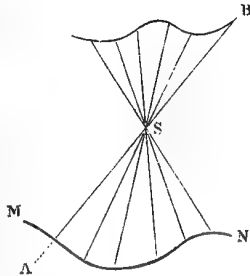
**415. Коническая поверхность.** Такъ наз. поверхность, производимая движеніемъ прямой  $AB$  (черт. 321), перемѣщающейся въ пространствѣ такъ, что она при этомъ постоянно проходитъ

через неподвижную точку  $S$  и пересѣкаетъ данную линію  $MN$ . Прямая  $AB$  наз. образующею, линія  $MN$ —направляющею, а точка  $S$  вершиною конической поверхности.

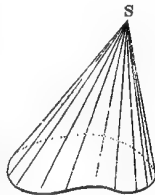
**416. Конусъ.** Тѣло, ограниченное коническою поверхностью и плоскостью, пересѣкающею всѣ образующія по одну сторону отъ вершины, наз. *конусомъ* (черт. 332). Часть конической поверхности, ограниченная этою плоскостью, наз. *боковою поверхностью*, а часть плоскости, отсѣкаемая боковою поверхностью,—*основаніемъ* конуса. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, есть *высота* конуса.

Конусъ наз. *прямымъ круговымъ*, если его основаніе есть кругъ, а высота проходитъ черезъ центръ основанія (черт. 323). Такой конусъ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольнаго тр.-ка  $SOA$  вокругъ катета  $SO$ , какъ оси. При этомъ гипотенуза  $SA$  производитъ боковую поверхность, а катетъ  $OA$ —основаніе конуса. Всякая прямая  $BO_1$ , параллельная  $AO$ , описываетъ при вращеніи кругъ, перпендикулярный къ оси. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченіе прямого кругового конуса плоскостью, параллельною основанію, есть кругъ. Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой круговой конусъ, который для краткости наз. просто *конусомъ*.

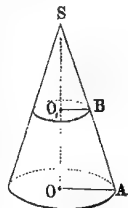
Иногда приходится разсматривать такіа пирамиды, которыхъ основанія суть многоугольники, вписанные въ основаніе конуса, или опи-



Черт. 321



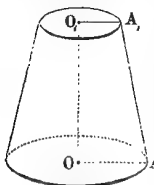
Черт. 322



Черт. 323

ные около него, а вершина совпадает съ вершиною конуса. Такія пирамиды наз. *вписанными* въ конусъ, или *описанными* около него.

**417. Усѣченный конусъ.** Усѣченнымъ конусомъ (черт.



Черт. 321

324) наз. часть полного конуса, заключенная между основаніемъ и сѣкущею плоскостью, параллельною основанію. Параллельныя круги, ограничивающіе усѣченный конусъ, наз. *основаніями* его. Усѣченный конусъ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольной трапеціи  $OA A_1 O_1$  вокругъ стороны  $OO_1$ , перпендикулярной къ основаніямъ трапеціи.

## Поверхность цилиндра и конуса.

**418. Замѣчаніе.** Боковыя поверхности цилиндра и конуса принадлежать къ поверхностямъ *кривымъ*, т. е. такимъ, которыхъ никакая часть не можетъ совмѣститься съ плоскостью. Поэтому мы должны опредѣлить, что разумѣютъ подъ величиною боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравниваютъ эти поверхности съ плоскою квадратною единицею.

**419. Опредѣленія.** Боковою поверхностью цилиндра (при измѣреніи ся квадратною единицею) наз. *предѣлъ*, къ которому стремится боковая поверхность правильной вписанной призмы, при неограниченномъ удвоеніи числа ея боковыхъ граней.

Боковою поверхностью конуса (при измѣреніи ся квадратною единицею) наз. *предѣлъ*, къ которому стремится боковая поверхность правильной вписанной пирамиды при неограниченномъ удвоеніи числа ея боковыхъ граней.

**420. Теорема.** Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на высоту.

Впишемъ въ цилиндръ какую-нибудь правильную призму и



обозначимъ черезъ  $s$ ,  $p$  и  $H$  числа, выражающія въ соответствующихъ единицахъ боковую поверхность, периметръ основанія и высоту этой призмы. Тогда будемъ имѣть (376):

$$s = pH$$

Предположимъ теперь, что число боковыхъ граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда величины  $s$  и  $pH$  сдѣлаются переменными, но равенство между ними не нарушится. Поэтому (250) равенство останется вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто переменныхъ подставимъ ихъ предѣлы. Предѣлъ  $p$  есть длина окружности основанія (256), а предѣлъ  $s$  есть то, наз. боковою поверхностью цилиндра. Значить, обозначивъ первую черезъ  $C$ , а вторую черезъ  $S$ , получимъ:

$$S = CH$$

**421. Слѣдствіа.** 1°. Если  $R$  означаетъ радіусъ основанія цилиндра, то  $C = 2\pi R$ ; поэтому боковая поверхность цилиндра выразится:

$$S = 2\pi RH$$

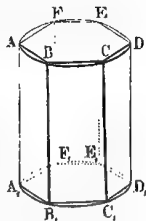
2°. Чтобы получить полную поверхность цилиндра, достаточно къ боковой поверхности приложить сумму площадей двухъ основаній; поэтому, обозначая полную поверхность черезъ  $T$ , будемъ имѣть:

$$T = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R(R + H)$$

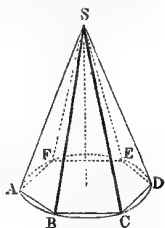
**422. Теорема.** Боковая поверхность конуса равна произведенію окружности основанія на половину образующей.

Впишемъ въ конусъ какую-нибудь правильную пирамиду и обозначимъ черезъ  $s$ ,  $p$  и  $l$  числа, выражающія въ соответствующихъ единицахъ боковую поверхность, периметръ основанія и апогею этой пирамиды. Тогда будемъ имѣть (377):

$$s = \frac{1}{2} pl$$



Черт. 325



Черт. 326.

Предположимъ теперь, что число боковыхъ граней вписанной пирамиды неограниченно удваивается; тогда величины  $s$  и  $\frac{1}{2} pl$  сдѣлаются переменными, но равенство между ними не нарушится. Поэтому оно останется вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто переменныхъ подставимъ ихъ предѣлы. Предѣлъ  $p$  есть длина окружности основанія, предѣлъ  $l$  есть образующая конуса, а предѣлъ  $s$  есть то, что наз. боковой поверхностью конуса. Значить, обозначая эти величины соответственно черезъ  $C$ ,  $L$  и  $S$ , получимъ:

$$S = \frac{1}{2} CL$$

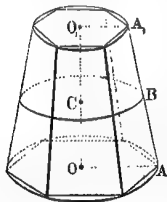
**423. Слѣдствіе.** 1°. Такъ какъ  $C = 2\pi R$ , то боковая поверхность конуса выразится:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi RL = \pi RL$$

2°. Полную поверхность конуса получимъ, если къ боковой поверхности приложимъ площадь основанія; поэтому:

$$T = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(R + L)$$

**424. Теорема.** Боковая поверхность усѣченного конуса равна произведенію полусуммы окружностей основаній на образующую.



Черт. 327

Впишемъ въ усѣченный конусъ какую-нибудь правильную усѣченную пирамиду и обозначимъ черезъ  $s$ ,  $p$ ,  $p_1$  и  $l$  числа, выражающія боковую поверхность, периметръ нижняго, периметръ верхняго основаній и апогею этой пирамиды. Тогда будемъ имѣть (378):

$$s = \frac{1}{2} (p + p_1) l$$

Изъ этого равенства, рассуждая подобно предыдущему, выведемъ:

$$S = \frac{1}{2} (C + C_1) L$$

гдѣ  $S$  есть боковая поверхность усѣченного конуса,  $C$  и  $C_1$  длины окружностей основаній, а  $L$  образующая.

**425. Слѣдствіа.** 1°. Если  $R$  и  $R_1$  будутъ радіусы окружностей нижняго и верхняго основаній, то боковая поверхность усѣченного конуса выразится:

$$S = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi R_1)L = \pi(R + R_1)L$$

2°. Проведемъ въ трапеціи  $OO_1A_1A$  (черт. 327), отъ вращенія которой получается усѣченный конусъ, среднюю линію  $BC$  (103). Тогда получимъ:

$$BC = \frac{1}{2}(OA + O_1A_1) = \frac{1}{2}(R + R_1)$$

Откуда:

$$R + R_1 = 2BC$$

Слѣд.:

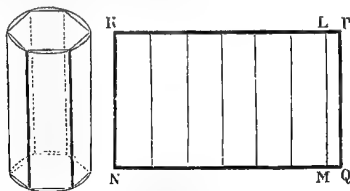
$$S = 2\pi BC.L$$

т.-е. боковая поверхность усѣченного конуса равна произведенію окружности средней сѣченія на образующую.

3°. Полная поверхность  $T$  усѣченного конуса выразится такъ:

$$T = \pi(R^2 + R_1^2 + RL + R_1L)$$

**426. Замѣчаніе.** Въ предыдущихъ теоремахъ боковыя поверхности цилиндра и конуса разсматривались, какъ предѣлы боковыхъ поверхностей правильныхъ описанныхъ призмъ или пирамидъ. Если бы, подобно тому, какъ мы это дѣлали при доказательствѣ этихъ теоремъ, мы стали находить предѣлы описанныхъ призмъ или пирамидъ, то нашли бы, что эти предѣлы тѣ же самыя, какъ и для вписанныхъ призмъ или пирамидъ. Вслѣдствіе этого боковыя поверхности цилиндра и конуса можно разсматривать, какъ общій предѣлъ боковыхъ поверхностей правильныхъ призмъ или пирамидъ, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ.



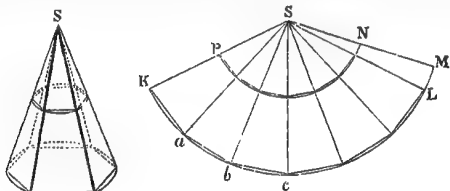
Черт. 328

**427. Развертка цилиндра и конуса.** Впишемъ въ цилиндръ (черт. 328)

какую-нибудь правильную призму и затѣмъ вообразить, что боковая поверхность разбита вдоль какого-нибудь бокового ребра. Очевидно, что вращаяся грани вокругъ реберъ, мы можемъ *развернуть* эту поверхность въ одну плоскость, безъ разрыва и безъ складокъ. Тогда получится то, что наз. *разверткой* боковой поверхности прав. призмы. Она представляетъ собою прямоугольникъ  $KLMN$ , составленный изъ столькохъ равныхъ прямоугольниковъ, сколько въ призмѣ боковыхъ граней. Основаніе его  $MN$  равно периметру основанія призмы, а высота  $KN$  есть высота призмы.

Вообразимъ теперь, что число боковыхъ граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда ея развертка будетъ все удлиняться, приближаясь къ *предѣльному* прямоугольнику  $KPQN$ , у котораго основаніе равно длинѣ окружности основанія цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этотъ прямоугольникъ наз. *разверткой* боковой поверхности цилиндра.

Подобно этому вообразимъ, что въ конусѣ вписана правильная пирамида (черт. 329). Мы можемъ разбивать ея боковую поверхность по какому-нибудь ребру и затѣмъ, повертывая грани вокругъ реберъ, получить ея развертку въ видѣ многоугольнаго сектора  $SKL$ , составленнаго изъ



Черт. 329

столькохъ равныхъ равнобедр. тр.-копъ, сколько въ пирамидѣ боковыхъ граней. Прямые  $SK, Sa, Sb...$  равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной  $Kab...L$  равна периметру основанія пирамиды. При неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней вписан. пирамиды развертка ея увеличивается, приближаясь къ *предѣльному* сектору  $SKM$ , у котораго дуга  $KM$  равна окружности основанія, а радіусъ  $SK$ —образующей конуса. Этотъ секторъ наз. *разверткой* боковой поверхности конуса.

Подобно этому можно получить развертку боковой поверхности усѣчен. конуса (черт. 329) въ видѣ части круговаго кольца  $KMNP$ .

## Объемъ цилиндра и конуса.

**428. Лемма 1.** Объемъ цилиндра есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ боковыхъ граней.

Впишемъ въ цилиндръ и опишемъ около него по какой-нибудь правил. одноименной призмы. Обозначимъ объемъ, площадь основанія и высоту соответственно: для цилиндра—  $V, B, H$ , для вписанной призмы—  $V_1, B_1, H$  и для описанной призмы—  $V_2, B_2, H$ . Тогда будемъ имѣть (388):

$$V_2 = B_2 H \quad V_1 = B_1 H$$

Откуда: 
$$V_2 - V_1 = (B_2 - B_1) H$$

При неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней призмъ, разность  $B_2 - B_1$  стремится къ нулю (295), а множитель  $H$  есть число постоянное: поэтому правая часть послѣдняго равенства, а слѣд. и его лѣвая часть стремится къ нулю. Объемъ цилиндра, очевидно, больше объема вписанной призмы, но меньше объема описанной; поэтому каждая изъ разностей  $V - V_1$  и  $V_2 - V$  меньше разности  $V_2 - V_1$ ; но послѣдняя, по доказанному, стремится къ нулю; слѣд., и первыя стремятся къ нулю; а это, по опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$V = \text{пред. } V_1 = \text{пред. } V_2$$

**429. Лемма 2.** Объемъ конуса есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ боковыхъ граней.

Впишемъ въ конусъ и опишемъ около него по какой-нибудь прав. одноименной пирамидѣ. Употребляя тѣ же обозначенія, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, будемъ имѣть (391):

$$V_2 = \frac{1}{3} B_2 H \quad V_1 = \frac{1}{3} B_1 H$$

Откуда: 
$$V_2 - V_1 = \frac{1}{3} H (B_2 - B_1)$$

Изъ этого равенства видно, что разность  $V_2 - V_1$  стремится къ нулю, когда число боковыхъ граней вписанной и

описанной пирамиды неограниченно удваивается; а такъ какъ каждая изъ разностей:  $V_2 - V$  и  $V - V_1$  меньше  $V_2 - V_1$ , то эти разности и подавно стремятся къ нулю; а это значить, что

$$V = \text{пред. } V_1 = \text{пред. } V_2$$

**430. Теоремы.** 1°. Объем цилиндра равенъ произведенію площади основанія на высоту.

2°. Объем конуса равенъ произведенію площади основанія на треть высоты.

Впишемъ въ цилиндръ прав. призму, а въ конусъ прав. пирамиду; тогда, употребляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть:

$$\text{для призмы} \dots\dots V_1 = B_1 H$$

$$\text{для пирамиды} \dots\dots V_1 = \frac{1}{3} B_1 H$$

Эти равенства остаются вѣрными, сколько бы мы не удваивали числа боковыхъ граней призмы и пирамиды; поэтому они останутся вѣрными и тогда, когда на мѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы (250); слѣд.:

$$\text{для цилиндра} \dots\dots V = BH$$

$$\text{для конуса} \dots\dots V = \frac{1}{3} BH$$

**431. Слѣдствіе.** Если радіусъ основанія цилиндра или конуса обозначимъ черезъ  $R$ , то  $B = \pi R^2$ ; поэтому:

$$\text{Об. цил. } V = \pi R^2 H; \quad \text{об. кон. } V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

**432. Теорема.** Объем усеченнаго конуса равенъ суммѣ объемовъ трехъ конусовъ, имѣющихъ одинаковую высоту съ усеченными конусомъ, а основаніями: одинъ — нижнее основаніе этого конуса, другой — верхнее, третій — среднее пропорціанальное между ними.

Подобно предыдущему можно доказать, что объемъ усеченнаго конуса есть общій предѣлъ объемовъ прав. вписанныхъ и описанныхъ усѣченныхъ пирамидъ. Но объемъ  $V$  прав. вписанной усѣченной пирамиды, которой высота есть  $H$ , а площади основаній  $B_1$  и  $b_1$ , выражается равенствомъ (393):

$$V_1 = \frac{1}{3} H (B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1})$$

Въ предѣлѣ, при неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней вписанной пирамиды, это равенство дастъ:

$$V = \frac{1}{3} H (B + b + \sqrt{Bb})$$

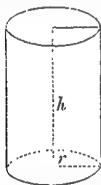
гдѣ  $V$  есть объемъ,  $B$  и  $b$  площади основаній и  $H$  высота усѣченного конуса.

**433. Слѣдствіе.** Если  $R$  и  $r$  будутъ радіусы нижняго и верхняго основаній усѣченного конуса, то  $B = \pi R^2$ ,  $b = \pi r^2$  и  $\sqrt{Bb} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \pi Rr$ ; поэтому:

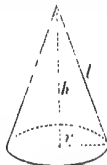
$$\text{Об. ус. кон. } V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

### Подобные цилиндры и конусы.

**434. Определеіе.** Два цилиндра или конуса наз. *подобными*, если они произшли отъ вращенія подобныхъ прямоугольниковъ или треугольниковъ вокругъ сходственныхъ сторонъ. Обозначимъ черезъ  $h$  и  $h_1$  высоты



Черт. 330



Черт. 331



двухъ подобныхъ цилиндровъ или конусовъ, черезъ  $r$  и  $r_1$  ихъ радіусы и черезъ  $l$  и  $l_1$  образующія; тогда, согласно определенію, будемъ имѣть:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{l}{l_1}$$

$$\text{Откуда: } \frac{r+h}{r_1+h_1} = \frac{r}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{r+l}{r_1+l_1} = \frac{r}{r_1}$$

**435. Теорема.** Боковыя и полныя поверхности подобныхъ цилиндровъ или конусовъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или высотъ. и объемы—какъ кубы радіусовъ или высотъ.

Обозначимъ черезъ  $S$ ,  $T$  и  $V$  соотвѣтственно боковую поверхность, полную поверхность и объемъ одного цилиндра или конуса, а черезъ  $S_1$ ,  $T_1$  и  $V_1$  тѣ же величины для другого цилиндра или конуса, подобнаго первому. Тогда будемъ имѣть:

Для цилиндровъ:

$$\begin{aligned}\frac{S}{S_1} &= \frac{2\pi rh}{2\pi r_1 h_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2} \\ \frac{T}{T_1} &= \frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r+h}{r_1+h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2} \\ \frac{V}{V_1} &= \frac{\pi r^2 h}{\pi r_1^2 h_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \frac{h^3}{h_1^3}\end{aligned}$$

Для конусовъ:

$$\begin{aligned}\frac{S}{S_1} &= \frac{\pi r l}{\pi r_1 l_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{l}{l_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2} \\ \frac{T}{T_1} &= \frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r+l}{r_1+l_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2} \\ \frac{V}{V_1} &= \frac{1/3 \pi r^2 h}{1/3 \pi r_1^2 h_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \frac{h^3}{h_1^3}\end{aligned}$$

## ГЛАВА II.

### Ш а р ь.

#### Сѣченіе шара плоскостью.

**436. Опреѣленіе.** Тѣло, происходящее отъ вращенія полукруга вокругъ діаметра, ограничивающаго его, наз. *шаромъ*, а поверхность, образуемая при этомъ полуокружностью, наз. *шаровою* или *сферическою* поверхностью. Эта поверхность представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ неподвижной точки, называемой *центромъ* шара.

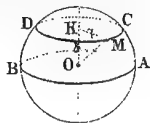
Прямая, соединяющая центръ съ какою-нибудь точкою поверхности, наз. *радіусомъ*, а прямая, соединяющая двѣ точки поверхности и проходящая черезъ центръ, наз. *діаметромъ* шара. Всѣ радіусы одного шара равны между собою. а діаметръ равенъ двумъ радіусамъ.

Два шара одинаковаго радіуса равны, потому что при вложеніи они совмѣщаются.



**437. Теорема.** Сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.

1°. Предположимъ сначала, что сѣкущая плоскость  $AB$  проходитъ черезъ центръ  $O$  шара; тогда всѣ точки линіи пересѣченія, принадлежа шаровой поверхности, одинаково удалены отъ точки  $O$ , лежащей въ сѣкущей плоскости; слѣд., сѣченіе есть кругъ.



Черт. 332

2°. Положимъ теперь, что сѣкущая плоскость  $CD$  не проходитъ черезъ центръ. Опустимъ на нее изъ центра перпендикуляръ  $OK$  и возьмемъ на линіи пересѣченія какую-нибудь точку  $M$ . Соединивъ ее съ  $O$  и  $K$ , получимъ прямоугольный тр.-къ  $МОК$ , изъ котораго находимъ:

$$MK = \sqrt{OM^2 - OK^2} \quad [1]$$

Такъ какъ длины  $OM$  и  $OK$  не измѣняются при измѣненіи положенія точки  $M$  на линіи пересѣченія, то разстояніе  $MK$  есть величина постоянная; значитъ, линія пересѣченія есть окружность.

**438. Слѣдствіе.** Пусть  $R$ ,  $r$  и  $d$  означаютъ: радіусъ шара, радіусъ круга сѣченія и разстояніе сѣкущей плоскости отъ центра; тогда равенство [1] приметъ видъ:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Изъ этой формулы выводимъ:

1°. Наибольшее сѣченіе получается при  $d=0$ , т.-е. когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ центръ шара. Въ этомъ случаѣ  $r=R$ .

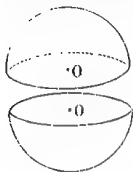
Сѣченіе шара плоскостью, проходящею черезъ центръ, наз. *большимъ кругомъ*.

2°. Сѣченія, равноотстояція отъ центра шара, равны.

3°. Изъ двухъ сѣченій, неодинаково удаленныхъ отъ центра шара, то больше, которое ближе къ центру.

## Свойства больших круговъ.

**439. Теорема.** *Большой кругъ дѣлитъ шаръ и его поверхность пополамъ.*



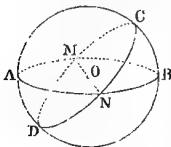
Черт. 333

Вообразимъ, что мы разрѣзали шаръ по какому-нибудь большому кругу и, перевернувъ верхнюю часть шара, вложили ее въ нижнюю такъ, чтобы у нихъ совпали круглыя основанія. Тогда всѣ точки одной части шаровой поверхности совмѣстятся съ точками другой части, потому что тѣ и другія одинаково удалены отъ общаго центра. Изъ этого слѣдуетъ, что большой кругъ дѣлитъ шаръ и его поверхность пополамъ.

**440. Теорема.** *Черезъ двѣ точки шаровой поверхности можно провести окружность большого круга и притомъ только одну, если эти точки не лежатъ на концахъ одного діаметра.*

Пусть на шаровой поверхности, имѣющей центръ  $O$ , взяты какія-нибудь двѣ точки  $A$  и  $B$ . Черезъ три точки  $A$ ,  $O$  и  $B$  всегда можно провести плоскость и притомъ только одну, если эти точки не лежатъ на одной прямой (т.-е. на діаметрѣ). Эта плоскость, проходя черезъ центръ  $O$ , дастъ въ пересѣченіи съ шаровою поверхностью, окружность большого круга.

**441. Теорема.** *Окружности двухъ большихъ круговъ пересѣкаются пополамъ.*



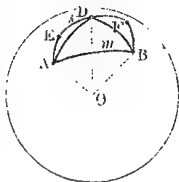
Черт. 334

Дѣйствительно, плоскости двухъ большихъ круговъ  $AB$  и  $CD$  проходятъ черезъ центръ  $O$ ; значитъ, онѣ пересѣкаются по прямой  $MN$ , проходящей черезъ центръ, т.-е. по общему ихъ діаметру; а діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ.

**442. Теорема.** *Кратчайшее расстояние на шаровой поверхности ме-*

жду двумя ея точками есть дуга большого круга, проведенная между ними.

Пусть  $m$  есть дуга большого круга, проведенная на шаровой поверхности между двумя ея точками  $A$  и  $B$ , а  $s$  какая-нибудь кривая, проведенная на шаровой поверхности между теми же точками. Докажемъ, что  $s$  длиннее  $m$ . Возьмемъ на кривой  $s$  произвольную точку  $D$  и соединимъ ее съ  $A$  и  $B$  дугами большого круга. Проведемъ радиусы  $OA$ ,  $OD$ ,  $OB$ , примемъ ихъ за



Черт. 385

ребра трехграннаго угла. Въ этомъ углѣ, какъ во всякомъ трехгранномъ (354), сумма плоскихъ угловъ  $AOB$  и  $DOB$  больше третиго плоскаго угла  $AOB$ . Но эти углы измѣряются дугами  $AD$ ,  $DB$  и  $AB$ , проведенными изъ вершины угловъ однимъ и тѣмъ же радиусомъ; слѣд., сумма дугъ  $AD$  и  $DB$  больше дуги  $AB$ . Возьмемъ теперь на кривой  $s$  промежуточные точки  $E$  и  $F$  и проведемъ дуги большого круга черезъ каждыя двѣ сосѣднія точки:  $A$ ,  $E$ ,  $D$ ,  $F$  и  $B$ . Такъ же, какъ и прежде, убѣдимся, что  $AE + ED > AD$  и  $DF + FB > DB$ ; значитъ, сумма  $AE + ED + DF + FB$  больше  $AD + DB$ , а потому и недавно больше дуги  $m$ . Вообразимъ теперь, что число промежуточныхъ точекъ, взятыхъ на кривой  $s$ , неограниченно увеличивается, и между каждыми двумя сосѣдними точками постоянно проводится дуги большихъ круговъ; тогда линія, составленная изъ этихъ дугъ, все увеличивается и постоянно остается больше дуги  $m$ ; значитъ, и предель, \*) къ которому она стремится, долженъ быть больше  $m$ ; а этотъ предѣлъ принимается за длину дуги  $s$ .

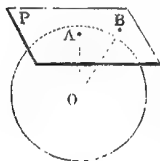
\*) Мы принимаемъ здѣсь безъ доказательства, что предѣлъ кривой  $AEDFB$ , составленной изъ дугъ большихъ круговъ, существуетъ и что онъ не зависитъ отъ выбора, по которому увеличивается число точекъ на кривой  $s$ .

## Плоскость, касательная къ шару.

**443. Опреѣленіе.** Плоскость, имѣющая съ шаровою поверхностью только одну общую точку, наз. *касательною* плоскостью.

Возможность существованія такой плоскости доказывается слѣдующей теоремою.

**Теорема.** *Плоскость ( $P$  черт. 336), перпендикулярная къ радіусу ( $OA$ ) въ концѣ его, лежащемъ на поверхности шара, есть касательная.*



Черт. 336

Возьмемъ на плоскости  $P$  произвольную точку  $B$  и соединимъ ее съ центромъ  $O$ . Такъ какъ  $OB$  наклонная, а  $OA$  перпендикуляръ къ  $P$ , то  $OB > OA$ . Поэтому точка  $B$  не можетъ лежать на шаровой поверхности; слѣд., у плоскости  $P$  есть только одна общая точка  $A$  съ шаровою поверхностью; значить, эта плоскость касательная.

**444. Обратная теорема.** *Касательная плоскость ( $P$ , черт. 336) перпендикулярна къ радіусу ( $OA$ ), проведенному въ точку касанія.*

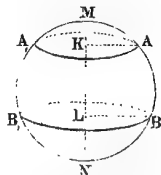
Такъ какъ, по определенію, точка  $A$  есть единственная, общая у плоскости съ шаровою поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежитъ внѣ шаровой поверхности и, слѣд., дальше отстоитъ отъ центра, чѣмъ  $A$ ; такимъ образомъ, прямая  $OA$  есть кратчайшее разстояніе точки  $O$  отъ плоскости  $P$ . т.-е.  $OA$  есть перпендикуляръ къ  $P$ .

## Поверхность шара и его частей.

**445. Опреѣленія.** Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными сѣкущими плоскостями  $AA_1$ ,

и  $BB_1$ , наз. шаровым поясом или зоною. Окружности сѣченій  $AA_1$  и  $BB_1$  наз. основаниями, а расстояние  $KL$  между параллельными плоскостями — высотой пояса.

Часть шаровой поверхности, отсѣкаемая какою-нибудь плоскостью  $AA_1$ , наз. сегментною поверхностью; окружность  $AA_1$  есть основание, а отрезок  $KM$  радиуса, перпендикулярнаго къ плоскости сѣченія, есть высота сегментной поверхности. Сегментную поверхность можно рассматривать, какъ частный случай пояса, а именно: если одна изъ параллельныхъ плоскостей сдѣлается касательною къ шару, тогда поясъ обращается въ сегментную поверхность.



Черт. 337

Шаровой поясъ и сегментную поверхность можно рассматривать, какъ поверхности обращенія: въ то время, какъ полуокружность  $MAN$ , вращаясь вокругъ діаметра  $MN$ , описываетъ шаровую поверхность, часть ея  $AB$  опишетъ поясъ, а часть  $MA$  — сегментную поверхность.

**446. Лемма.** Боковая поверхность каждаго изъ трехъ тѣлъ: конуса, усѣченной конуса и цилиндра равна произведенію высоты тѣла на длину окружности, у которой радиусъ есть перпендикуляръ, возстановленный изъ середины образующей до пересѣченія съ осью.

1°. Пусть конусъ образуется вращеніемъ тр.-ка  $ABC$  вокругъ катета  $AC$ . Если  $D$  есть середина образующей  $AB$ , то (422):

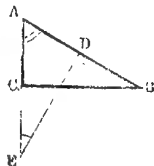
$$\text{Боков. пов. конуса} = 2\pi BC \cdot AD \quad [1]$$

Проведи  $DE \perp AB$ , получимъ два подобныхъ тр.-ка  $ABC$  и  $ADE$  (они прямо-угольные и имѣютъ общій уголъ  $A$ ); изъ ихъ подобія выводимъ:

$$BC : ED = AC : AD;$$

$$\text{откуда: } BC \cdot AD = ED \cdot AC$$

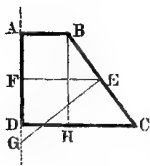
Теперь равенство [1] можно написать такъ:



Черт. 338

Боков. пов. конуса  $= 2\pi ED \cdot AC$ . Что и треб. доказ.

2°. Пусть усѣченный конусъ производится вращеніемъ трапеціи  $ABCD$  вокругъ стороны  $AD$ . Проведя среднюю линію  $EF$ , будемъ имѣть (425, 2°):



Черт. 339

Боков. пов. ус. конуса  $= 2\pi EF \cdot BC$  [2]  
Приведемъ  $EG \perp BC$  и  $BH \parallel AD$ ; тогда получимъ два подобныхъ тр.-ка  $EFG$  и  $BCN$  (стороны одного перпендикулярны къ сторонамъ другого); изъ ихъ подобія выводимъ:

$$EF : BH = EG : BC$$

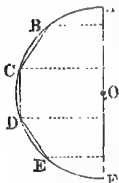
Откуда:  $EF \cdot BC = BH \cdot EG = AD \cdot EG$

Теперь равенство [2] можно написать такъ:

Бок. пов. ус. кон.  $= 2\pi EG \cdot AD$ . Что и треб. доказ.

3°. Теорема остается вѣрной и въ примѣненіи къ цилиндру такъ какъ окружность, о которой говорится въ теоремѣ, равна окружности основанія цилиндра.

**447. Опредѣленіе.** За величину поверхности, образуемой вращеніемъ какой-нибудь части  $BE$  полуокружности  $ACF$  вокругъ діаметра  $AF$ , принимаютъ *предѣлъ*, къ которому стремится поверхность, образуемая вращеніемъ вокругъ того же діаметра правильной вписанной ломаной линіи  $BCDE$ , когда число ея сторонъ неограниченно увеличивается.



Черт. 340

Это опредѣленіе распространяется и на шаровую поверхность; въ этомъ случаѣ правильная ломаная линія вписывается въ полукружность.

**448. Теорема.** Поверхность шарового пояса (и сегментная поверхность) равна произведенію окружности большаго круга на высоту.

Пусть въ дугу  $AF$ , производящую поверхность пояса, вписана правильная ломаная линія  $ACDEF$  съ произвольнымъ числомъ сторонъ.

Поверхность, образуемая вращением этой ломаной, состоит из частей, образуемых сторонами  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ... Эти отдельные поверхности представляют собою боковые поверхности или конуса (отъ вращения  $AC$ ), или усеченнаго конуса (отъ вращения  $CD$ ,  $EF$ ...), или цилиндра (отъ вращения  $DE$ , если  $DE \parallel AB$ ). Поэтому мы можем применить къ нимъ лемму предыдущаго §. При этомъ замѣтимъ, что перпендикуляры, восстановленные изъ середины образующихъ до пересѣченія съ осью, равны апофемѣ правильной вписанной ломаной. Обозначивъ ее черезъ  $a$ , получимъ:



Черт. 341

$$\text{поверхн. } AC = 2\pi a \cdot Ac$$

$$\text{поверхн. } CD = 2\pi a \cdot cd$$

$$\text{поверхн. } DE = 2\pi a \cdot de$$

.....

Сложивъ эти равенства почленно, найдемъ:

$$\text{поверхн. } ACDEF = 2\pi a \cdot Af$$

При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ вписанной ломаной апогема  $a$  стремится къ предѣлу, равному радіусу шара.  $R$ , а прямая  $Af$  остается безъ измѣненія; слѣд.:

$$\text{пред. поверхн. } ACDEF = 2\pi R \cdot Af$$

Но предѣлы поверхности  $ACDEF$  есть то, что принимаютъ за величину поверхности шароваго пояса (или сегментной поверхности); а прямая  $Af$  есть высота пояса; поэтому:

$$\text{поверхн. пояса} = 2\pi R H$$

**Замѣчаніе.** Доказательство нисколько не измѣнится, если предположимъ, что ломаная линия вписана не въ дугу  $AF$ , образующую частный случай пояса (сегментную поверхность), а въ какую угодно дугу, напр. въ  $CF$ .

**449. Теорема.** Поверхность шара равна произведенію окружности большаго круга на діаметръ.

Или: поверхность шара равна учетверенной площади большаго круга.

Поверхность шара, производимую вращением полуокружности  $ADB$  (черт. 341), можно рассматривать, как сумму поверхностей, образуемых вращением дугъ  $AD$  и  $DB$ . Поэтому, согласно предыдущей теоремѣ, можемъ писать:

$$\begin{aligned} \text{пов. шара} &= 2\pi R \cdot Ad + 2\pi R \cdot dB = 2\pi R (Ad + dB) = \\ &= 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

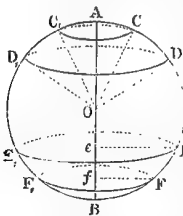
**150. Слѣдствіе.** Поверхности шаровъ относятся, какъ квадраты радиусовъ или диаметровъ, потому что, обозначая черезъ  $R$  и  $R_1$  радиусы, а черезъ  $S$  и  $S_1$  поверхности двухъ шаровъ, будемъ имѣть:

$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1^2 = R^2 : R_1^2 = (2R)^2 : (2R_1)^2$$

**151. Замѣчаніе.** Если бы, вмѣсто того, чтобы въ дугу  $AF$  (черт. 341) вписывать правильную ломаную линію, мы описали около нея правильную ломаную, то совершенно такъ же доказали бы, что предѣлъ поверхности, образуемой этой ломаной, равенъ  $2\pi RH$ . Такимъ образомъ, поверхность шарового пояса (сегментной поверхности и лѣлаго шара) можно рассматривать, какъ *общій предѣлъ* поверхностей, образуемыхъ вращениемъ правильныхъ ломаныхъ линій, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ.

### Объемъ шара и его частей.

**152. Опредѣленія.** Тѣло, получаемое отъ вращенія кругового сектора  $COD$  вокругъ диаметра  $AB$ , не пересѣкающаго его поверхности, наз. *шаровымъ секторомъ*;



Черт. 343

это тѣло ограничено боковыми поверхностями двухъ конусовъ и поверхностью шарового пояса; послѣдняя поверхность наз. *основаніемъ* шарового сектора. Въ частномъ случаѣ одинъ изъ радиусовъ кругового сектора можетъ совпадать съ осью вращенія; напр., секторъ  $AOO$ , вращаясь вокругъ  $AO$ , производитъ шаровой секторъ  $OACAC_1$ , ограниченный боковой поверхностью конуса и сегментною поверхностью.

Часть шара, заключенная между параллельными плоскостями  $EE_1$  и  $FF_1$ , наз. *шаровымъ слоемъ*. Круги параллель-



ныхъ сѣченій суть основанія слоя, а расстояние  $ef$  между ними—его высота.

Часть шара  $FF_1B$ , отсѣкаемая какою-нибудь плоскостью  $FF_1$ , наз. шаровымъ сегментомъ. Кругъ сѣченія есть основаніе сегмента, а отрезокъ  $Bf$  радіуса, перпендикулярнаго къ основанію, есть высота сегмента. Шаровой сегментъ представляетъ частный случай шарового слоя, а именно: если одна изъ параллельныхъ плоскостей сдѣлается касательною къ шару, то слой обратится въ шаровой сегментъ.

Шаровой слой и сегментъ можно рассматривать, какъ тѣла вращенія: когда полукругъ  $ADB$  (черт. 343) производить своимъ вращеніемъ шаръ, часть его  $EefF$  производитъ слой, а часть  $fFB$ —шаровой сегментъ.

**453. Лемма.** Если тр.-къ  $ABC$  вращается вокругъ оси  $xy$ , которая лежитъ въ плоскости тр.-ка, проходитъ чрезъ его вершину  $A$ , но не пересѣкаетъ его поверхности, то объемъ тѣла, получаемого при этомъ вращеніи, равенъ произведенію поверхности, образуемой противоположною стороною  $BC$ , на одну треть высоты  $h$ , опущенной эту сторону.

При доказательствѣ рассмотримъ три случая

1°. Ось совпадаетъ стороною  $AB$ . Въ этомъ случаѣ искомый объемъ равенъ суммѣ объемовъ двухъ конусовъ, получаемыхъ вращеніемъ прямоугольныхъ тр.-ковъ  $BOD$  и  $DCA$ . Первый объемъ равенъ  $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DB$ , а второй— $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DA$ ; поэтому:

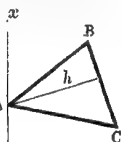
$$\text{об. } ABC = \frac{1}{3}\pi CD^2(DB+DA) = \frac{1}{3}\pi DC \cdot DC \cdot BA$$

Произведеніе  $DC \cdot BA$  равно  $BC \cdot h$ , такъ какъ каждое изъ этихъ произведеній выражаетъ двоякую площадь тр.-ка  $ABC$ ; поэтому:

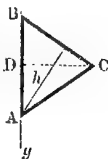
$$\text{об. } ABC = \frac{1}{3}\pi DC \cdot BC \cdot h$$

Но произведеніе  $\pi DC \cdot BC$  равно боковой поверхности конуса  $BDC$ ; значитъ

$$\text{об. } ABC = (\text{пов. } BC) \cdot \frac{1}{3}h$$

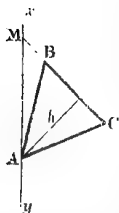


Черт. 344



Черт. 345

2°. Ось не совпадаетъ съ  $AB$  и не параллельна  $BC$ .



Черт. 346

Въ этомъ случаѣ искомый объемъ равенъ разности объемовъ, производимыхъ вращеніемъ тр.-ковъ  $AMC$  и  $AMB$ . По доказанному въ первомъ случаѣ объемъ  $AMC = \frac{1}{3}h$  (пов.  $MC$ ), а объемъ  $AMB = \frac{1}{3}h$  (пов.  $MB$ ); слѣд.:

$$\text{Об. } ABC = \frac{1}{3}h \text{ (пов. } MC -$$

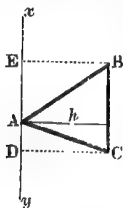
$$\text{--- пов. } MB) = \frac{1}{3}h \text{ (пов. } BC)$$

3°. Ось параллельна сторонѣ  $BC$ . (черт. 347).

Тогда искомый объемъ равенъ объему  $DEBC$  безъ объема  $AEB$  и безъ объема  $ACD$ ; первый изъ нихъ равенъ  $\pi DC^2$ .  $ED$ , второй —  $\frac{1}{3}\pi EB^2 \cdot EA$  и третій —  $\frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD$ . Принявъ теперь во вниманіе, что  $EB = DC$ , получимъ:

$$\text{Объемъ } ABC = \pi DC^2 (ED - \frac{1}{3}EA) = \frac{1}{3}\pi AD$$

$$= \pi DC^2 (ED - \frac{1}{3}ED) = \pi DC^2 \cdot \frac{2}{3}ED$$



Черт. 347

Произведение  $2\pi DC \cdot ED$  выражаетъ боковую поверхность цилиндра, производимую стороной  $BC$ ; поэтому:

$$\text{Об. } ABC = (\text{пов. } BC) \cdot \frac{1}{3}DC = (\text{пов. } BC) \cdot \frac{1}{3}h$$

**454. Теорема.** Объемъ шарового сектора равенъ произведенію поверхности его основанія на третью радиуса.

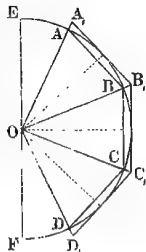
Пусть шаровой секторъ производится вращеніемъ вокругъ діаметра  $EF$  (черт. 348) сектора  $AOD$ . Поведемъ разсужденіе въ слѣдующей послѣдовательности.

1°. Впишемъ въ дугу  $AD$  правильную ломаную линію  $ABCD$  съ произвольнымъ числомъ сторонъ и затѣмъ опишемъ около нея соответствующую ломаную  $A_1B_1C_1D_1$ . Многоугольные секторы  $OABCD$  и  $OA_1B_1C_1D_1$  произведутъ при вращеніи нѣкоторые тѣла, объемы которыхъ обозначимъ: перваго черезъ  $V_1$ , а втораго черезъ  $V_2$ . Объемъ  $V_1$  есть сумма объемовъ, получаемыхъ вращеніемъ тр.-ковъ  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  вокругъ оси  $EF$ ; объемъ  $V_2$  есть сумма объе-

мовъ, получаемыхъ вращеніемъ вокругъ той же оси тр.-ковъ  $OA_1B_1$ ,  $OB_1C_1$ ,  $OC_1D_1$ . Примѣнимъ къ этимъ объемамъ лемму предыдущаго §, причемъ замѣтимъ, что высоты первыхъ тр.-ковъ равны апоземъ  $a$  вписанной ломаной, а высоты вторыхъ тр.-ковъ равны радіусу  $R$  шара. Согласно этой леммѣ будемъ имѣть:

$$V_1 = (\text{пов. } AB) \frac{a}{3} + (\text{пов. } BC) \frac{a}{3} + (\text{пов. } CD) \frac{a}{3} \\ = (\text{пов. } ABCD) \frac{a}{3}$$

$$V_2 = (\text{пов. } A_1B_1) \frac{R}{3} + (\text{пов. } B_1C_1) \frac{R}{3} + (\text{пов. } C_1D_1) \frac{R}{3} \\ = (\text{пов. } A_1B_1C_1D_1) \frac{R}{3}$$



Черт. 348.

2°. Вообразимъ теперь, что число сторонъ обѣихъ ломанныхъ линий неограниченно удваивается. Тогда поверхности  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  будутъ стремиться къ общему предѣлу, именно къ поверхности шарового пояса  $AD$ , а апогема  $a$  будетъ имѣть предѣломъ радіусъ  $R$ ; слѣд.:

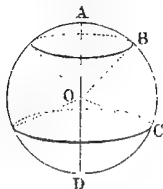
$$\text{пред. } V_1 = \text{пред. } V_2 = (\text{пов. } AD) \frac{R}{3}$$

3°. Теперь докажемъ, что общій предѣлъ объемовъ  $V_1$  и  $V_2$  есть объемъ  $V$  шарового сектора  $OAB$ .—Очевидно, что  $V > V_1$  и  $V_2 > V$ ; значить, каждая изъ разностей  $V - V_1$  и  $V_2 - V$  меньше разности  $V_2 - V_1$ . Такъ какъ, по доказанному, объемы  $V_2$  и  $V_1$  стремятся къ общему предѣлу, то разность  $V_2 - V_1$  стремится къ нулю; слѣд., разности  $V - V_1$  и  $V_2 - V$  и подавно стремятся къ нулю; а это значить, что  $V = \text{пред. } V_1 = \text{пред. } V_2$ . Но было доказано, что  $\text{пред. } V_1 = (\text{пов. } AD) \frac{R}{3}$ ; значить:

$$V = (\text{пов. } AD) \frac{R}{3}$$

**Замѣчаніе.** Теорема и ея доказательство не зависятъ отъ того, будетъ ли одинъ изъ радіусовъ кругового сектора совпадать съ осью вращенія, или пѣтъ.

**455. Теорема.** Объем шара равен произведению его поверхности на треть радиуса.



Черт. 349

Разбивъ полукругъ  $ABCD$ , производящій шаръ, на какіе-нибудь секторы  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ , мы замѣтимъ, что объемъ шара можно разсматривать, какъ сумму объемовъ этихъ секторовъ. Такъ какъ, согласно предыдущей теоремѣ:

$$\text{Объемъ } AOB = (\text{пов. } AB)^{\frac{1}{3}} R$$

$$\text{Объемъ } BOC = (\text{пов. } BC)^{\frac{1}{3}} R$$

$$\text{Объемъ } COD = (\text{пов. } CD)^{\frac{1}{3}} R$$

$$\begin{aligned} \text{то объемъ шара} &= (\text{пов. } AB + \text{пов. } BC + \text{пов. } CD)^{\frac{1}{3}} R = \\ &= (\text{пов. } ABCD)^{\frac{1}{3}} R \end{aligned}$$

**456. Слѣдствіе.** Обозначимъ высоту шарового пояса или сегмента черезъ  $H$ , а радиусъ шара черезъ  $R$ ; тогда поверхность пояса или сегмента выразится, какъ мы видели (448) формулой  $2\pi RH$ , а поверхность шара (449) формулой  $4\pi R^2$ ; поэтому:

$$\text{Об. шар. сектора} = 2\pi RH \cdot \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} \pi R^2 H$$

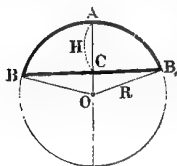
$$\text{Об. шара} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Отсюда видно, что объемы шаровъ относятся, какъ кубы радиусовъ или диаметровъ.

**457. Теорема.** Объем шарового сегмента равенъ объему цилиндра, у котораго радиусъ основанія есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, умноженному на треть высоты сегмента,

$$\text{т. е.} \quad V = \pi H^2 (R - \frac{1}{3} H)$$

гдѣ  $H$  есть высота сегмента, а  $R$  радиусъ шара.



Черт. 350

Объемъ сегмента  $ABV_1$  найдется, если изъ объема шарового сектора  $OABV_1$  вычтемъ объемъ конуса  $OVB_1$ . Первый изъ нихъ равенъ  $\frac{2}{3} \pi R^2 H$ , а второй  $\frac{1}{3} \pi CB^2 \cdot CO$ . Такъ какъ  $BC$  есть средняя пропорціональная между  $AC$  и  $CD$  то  $CB^2 = AC \cdot CD = H(2R - H)$ ; поэтому  $CB^2 \cdot CO = H(2R - H)(R - H) = 2R^2 H - 2RH^2 + H^3 = 2R^2 H - 3RH^2 + H^3$ ; слѣд.:

$$\text{об. } ABV_1 = \text{об. } OABV_1 - \text{об. } OVB_1 = \frac{2}{3} \pi R^2 H -$$

$$\frac{1}{3} \pi CB^2 \cdot CO = \frac{2}{3} \pi R^2 H - \frac{2}{3} \pi RH^2 + \frac{1}{3} \pi H^3 =$$

$$\pi H^2 (R - \frac{1}{3} H)$$

**458. Теорема.** Объем шарового слоя равен объему шара, чья диаметр — высота слоя, сложенного с полусуммой объемов двух цилиндров, у которых высота равна высоте слоя, а основания: у одного нижнее, у другого верхнее основание слоя.

$$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$$

т. е. где  $H$  есть высота слоя, а  $r_1$  и  $r_2$  радиусы оснований слоя.

Предварительно найдем объем, получаемый вращением вокруг диаметра  $AF$  кругового сегмента  $BC$  (покрытого на чертеже штрихами). Этот объем есть разность между объемом шарового сектора  $OBC$  и объемом тела, получаемого вращением тр-ка  $OBC$ . Первый равен  $\frac{2}{3}\pi R^2 H$ , а второй будет

$$(\text{пов. } BC) \frac{1}{3} OE = (2\pi OE \cdot H) \frac{1}{3} OE = \frac{2}{3}\pi OE^2 \cdot H$$

След., объем от вращения сегмента выразится так:

$$\frac{2}{3}\pi H(R^2 - OE^2) = \frac{2}{3}\pi H \cdot CE^2 = \frac{2}{3}\pi H \cdot \frac{1}{4} BC^2 = \frac{1}{6}\pi BC^2 \cdot H$$

Чтобы получить объем слоя, достаточно к найденному объему приложить объем усеченного конуса  $BD_1C_1C$ ; поэтому объем слоя будет:

$$\frac{1}{6}\pi BC^2 H + \frac{1}{3}\pi(Ca^2 + Bb^2 + Ca \cdot Bb)H = \frac{1}{6}\pi H(BC^2 + 2Ca^2 + 2Bb^2 + 2Ca \cdot Bb)$$

Проведем  $BD \perp Ca$ , будем иметь:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = H^2 + (Ca - Bb)^2 = H^2 + Ca^2 + Bb^2 - 2Ca \cdot Bb$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, найдем:

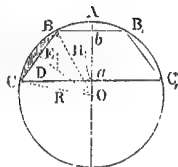
$$\text{об. слоя} = \frac{1}{6}\pi H(H^2 + 3Ca^2 + 3Bb^2) = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(Ca^2 + Bb^2)H$$

или, обозначая  $Ca$  через  $r_1$ , а  $Bb$  через  $r_2$ :

$$\text{об. слоя} = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$$

Положив в этой формуле  $r_2 = 0$ , получим новое выражение для объема шарового сегмента:

$$\text{об. сегм.} = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi r_1^2 H$$



Черт. 351

# ЗАДАЧИ.

353. Объем цилиндра, у которого высота вдвое больше диаметра, равен 1 куб. метру. Вычислить его высоту.

354. Диаметр основания цилиндра  $\equiv 16$  сант., а полная поверхность его содержит 1546 квадрат сант.; вычислить высоту этого цилиндра.

355. Найти весь железной цилиндрической трубки, которой внутренний диаметр  $\equiv 17$  сант., внешний диаметр  $\equiv 18$  сант., а длина 74 сант.; удельный весь железа 7,7.

356. В сосуд, имеющий форму конуса, обращенного вершиною вниз, наливают 345 граммов ртути. Зная, что угол при вершине конуса равен  $60^\circ$ , а уд. весь ртути 13,596, вычислить высоту, до которой налита в сосуд ртуть.

357. Вычислить боковую поверхность и объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований суть 27 и 18 сант., а образующая 21 сант.

358. На какомъ разстоянии отъ центра шара, котораго радиусъ равенъ 2,425 метра, слѣдуетъ провести слѣдующую плоскость, чтобы отношеніе поверхности меньшаго сегмента къ боковой поверхности конуса, имѣющаго общее съ сегментомъ основаніе, а вершину въ центрѣ шара, равнялось 1:4.

359. Найти объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія прав. 6-угольника со стороною  $a$  вокругъ одной изъ своихъ сторонъ.

360. Вычислить радиусъ шара, описаннаго около куба, котораго ребро равно 1 метру.

361. Железный пустой шаръ, котораго внешний радиусъ  $\equiv 0,154$  метра, плаваетъ въ водѣ, погружаясь въ нее на половину. Вычислить толщину этого шара, зная, что уд. весь железа равенъ 7,7.

362. Вычислить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія прав. треугольника со стороною  $a$  вокругъ оси, проходящей черезъ его вершину и параллельной противоположной сторонѣ.

363. Данъ равнобедренный  $\triangle ABC$  со стороною  $a$ ; на  $BC$  строить квадратъ  $BODE$ , располагая его въ противоположную сторону отъ треугольника. Вычислить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія 5-угольника  $ABEDC$  вокругъ стороны  $AB$ .

364. Данъ квадратъ  $ABCD$  со стороною  $a$ . Черезъ вершину  $A$  проводить прямую  $AR$ , перпендикулярную къ діагонали  $AC$ , и вращаютъ квадратъ вокругъ  $AR$ . Вычислить поверхность, образуемую периметромъ квадрата, и объемъ, образуемый площадью квадрата.

365. Данъ прав. 6-угольникъ  $ABCDEF$  со стороною  $a$ . Черезъ вершину  $A$  проводить прямую  $AR$ , перпендикулярную къ радиусу  $OA$ , и вращаютъ 6-угольникъ вокругъ  $AR$ . Вычислить поверхность, образуемую периметромъ, и объемъ, образуемый площадью прав. 6-угольника.

366. Въ шарѣ, котораго радиусъ равенъ 2, просверлено цилиндрическое отверстіе вдоль его діаметра. Вычислить объемъ оставшейся части, если радиусъ цилинд. отверстія равенъ 1.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

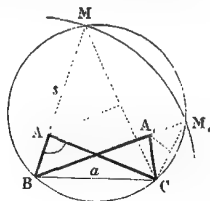
## Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

**1. Методъ геометрическихъ мѣстъ**, извѣстный еще со времени Платона (IV вѣка до Р. Хр.), состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ, что рѣшеніе предложенной задачи сводится къ нахожденію нѣкоторой точки, которая должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Отбросимъ изъ этихъ условій какое-нибудь одно; тогда задача сдѣлается *неопредѣленною*, т. е. ей могутъ удовлетворять безчисленное множество точекъ. Эти точки составятъ нѣкоторое геометрическое мѣсто. Построимъ его, если это окажется возможнымъ. Затѣмъ примемъ во вниманіе отброшенное нами условіе и откинемъ какое-нибудь другое; тогда задача будетъ снова удовлетворяться безчисленнымъ множествомъ точекъ, которыя составятъ новое геометрическое мѣсто. Построимъ его, если это возможно. Искомая точка, удовлетворяя всемъ условіямъ, должна лежать на обоихъ геометрическихъ мѣстахъ, т. е. она должна находиться въ ихъ пересѣченіи. Задача окажется возможной или невозможной, смотря по тому, пересѣкаются ли нѣтъ найденный geometr. мѣста; и задача будетъ имѣть столько рѣшеній, сколько окажется точекъ пересѣченія.

Приведемъ на этотъ методъ одинъ примѣръ, который выѣстъ съ тѣмъ показать намъ, какъ иногда приходится вводить въ чертежъ вспомогательныя линіи съ цѣлью принять во вниманіе всѣ данныя условія задачи.

**Задача.** Построить треугольникъ по основанію  $a$ , углу при вершинѣ  $A$  и суммѣ  $s$  боковыхъ сторонъ.

Пусть  $ABC$  будетъ искомый  $\triangle$ . Чтобы принять во вниманіе данную сумму боковыхъ сторонъ, продолжимъ  $BA$  и отложимъ  $BM = s$ . Проведя  $MC$ , получимъ вспомогательный тр.-къ  $BMC$ . Если мы построимъ этотъ тр.-къ, то затѣмъ легко построимъ и тр.-къ  $ABC$ . Построеніе тр.-ка  $BMC$  сводится къ нахожденію точки  $M$ . Замѣтивъ, что тр.-къ  $AMC$  равнобедренный ( $AM = AC$ ) и слѣд.,  $\angle M = \frac{1}{2}A$  ( $\angle M + \angle C = \angle A$ ), мы видимъ, что точка  $M$  должна удовлетворять двумъ условіямъ: 1) она удалена отъ  $B$  на разстояніе  $s$ , во 2) изъ нея данная копечная прямая  $BC$  должна подл. угломъ, равнымъ  $\frac{1}{2}A$ . Отбросивъ второе условіе, мы получимъ



Черт. 352

бесчисленное множество точек  $M$ , лежащих на окружности, описанной изъ  $B$  радиусомъ, равнымъ  $\alpha$ . Отбросивъ первое условіе, мы получимъ также бесчисленное множество точекъ  $M$ , лежащихъ на дугѣ сегмента, построеннаго на  $BC$  и вмѣщающаго уголъ, равный  $\frac{1}{2}A$ . Такимъ образомъ нахождение точки  $M$  сводится къ построению двухъ геометрическихъ мѣстъ, изъ которыхъ каждое мы построить умѣемъ. Задача окажется невозможною, если эти геометрическія мѣста не будутъ имѣть общихъ точекъ; задача будетъ имѣть одно или два рѣшенія, смотря по тому, касаются ли, или же пересѣкаются эти мѣста (на нашемъ чертежѣ дуга сегмента пересѣкается съ окружностью; вслѣдствіе этого получаютъ два тр.-ка  $ABC$  и  $A_1BC$ , удовлетворяющіе условіямъ задачи).

Иногда задача сводится не къ опредѣленію точки, а къ нахожденію прямой, удовлетворяющей нѣсколькимъ условіямъ. Если отбросимъ одно изъ нихъ, то получимъ бесчисленное множество прямыхъ; при этомъ можетъ случиться, что эти прямыя опредѣляютъ нѣкоторую линію (напр., всѣ будутъ касательными къ нѣкоторой окружности). Отбросивъ другое условіе и принявъ во вниманіе то, которое было откинуто ранѣе, мы получимъ снова бесчисленное множество прямыхъ, которыя, быть можетъ, опредѣляютъ нѣкоторую другую линію. Построивъ, если возможно, эти двѣ линіи, мы затѣмъ легко найдемъ и искомую прямую. Пусть, напр., намъ предложена задача: *провести съѣзжую къ двумъ даннымъ окружностямъ  $O$  и  $O_1$  такъ, чтобы части съѣзжей, заключенныя внутри окружностей, равнялись соответственно даннымъ длинамъ  $a$  и  $a_1$* . Если возьмемъ только одно условіе, напр., чтобы часть съѣзжей, лежащая внутри круга  $O$ , равнялась  $a$ , то получимъ безчисленное множество съѣзжихъ, которая всѣ должны быть одинаково удалены отъ центра этого круга (такъ какъ равныя хорды одинаково удалены отъ центра). Поэтому, если въ кругѣ  $O$  гдѣ-нибудь построимъ хорду, равную  $a$ , и затѣмъ радиусомъ, равнымъ разстоянію этой хорды отъ центра, опишемъ окружность, concentрическую съ  $O$ , то всѣ съѣзжія, о которыхъ идетъ рѣчь, должны касаться этой вспомогательной окружности. Подобнымъ образомъ, принявъ во вниманіе только второе условіе, мы увидимъ, что искома съѣзжая должна касаться второй вспомогательной окружности, concentрической съ  $O_1$ . Значить, вопросъ приводится къ построению общей касательной къ двумъ окружностямъ.

Кромѣ тѣхъ геометрическихъ мѣстъ, которыя указаны въ текстѣ этой книги (§§ 63, 98, 162, 200), полезно замѣтить еще слѣдующія (доказательство предоставляемъ самимъ учащимся):

10. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенныя между сторонами даннаго угла, есть прямая, проходящая черезъ вершину угла и какую нибудь одну изъ этихъ точекъ.

20. Геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ сторонъ даннаго угла находятся въ данномъ отношеніи, состоитъ изъ двухъ пря-



мышъ, проходящихъ черезъ вершину угла, и изъ которыхъ одна лежитъ внутри угла, а другая внѣ его.

30. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи всѣ равныя хорды данной окружности, есть окружность, концентрическая съ данною.

40. Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности, имѣютъ данную длину, есть окружность, концентрическая съ данною.

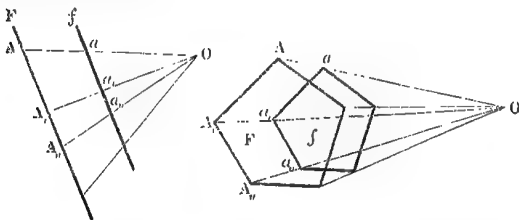
50. Геометрическое мѣсто точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ  $A$  и  $B$  имѣютъ постоянную сумму, есть окружность, которой центръ лежитъ въ среднѣйшей прямой  $AB$  (доказательство основывается на теоремѣ § 212).

60. Геометрическое мѣсто точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ  $A$  и  $B$  имѣютъ постоянную разность, есть прямая, перпендикулярная къ прямой  $AB$ .

70. Геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ сторонъ данного угла постоянна, есть лежащій внутри угла отрѣзокъ прямой, отсѣкающей отъ угла равнобедренный тр.-к. Продолженія этого отрѣзка (къ обѣмъ сторонамъ) представляютъ geometr. мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ сторонъ угла постоянна.

80. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи хорды, проведенныя изъ одной точки  $A$  данной окружности, есть окружность, касательная къ данной въ точкѣ  $A$ .

Последнее геометрическое мѣсто составляетъ частный случай слѣдующаго болѣе общаго:



Черт. 353

90. Если изъ данной точки  $O$  (черт. 353) къ различнымъ точкамъ  $A, A_1, A_2, \dots$  какой-нибудь фигуры  $F$  провести прямыя  $OA, OA_1, OA_2, \dots$  и на каждой изъ нихъ отложимъ части  $Oa, Oa_1, Oa_2, \dots$  такія, что

$$Oa:OA=Oa_1:OA_1=Oa_2:OA_2=\dots$$

то геометрическое мѣсто точекъ  $a, a_1, a_{11} \dots$  есть фигура  $f$ , подобная фигурѣ  $F$  и одинаково съ ней расположенная относительно точки  $O$ .

Такимъ образомъ, если фигура  $F$  есть прямая, то и  $f$  есть прямая (параллельная  $F$ ); если  $F$  есть многоугольникъ, то и  $f$  есть многоугольникъ, подобный  $F$  и одинаково съ нимъ расположенный; если  $F$  есть окружность то и  $f$  есть окружность.

Когда пропорциональныя части  $Oa, Oa_1, Oa_{11} \dots$  откладываются на продолженіяхъ линий  $OA, OA_1 \dots$  (за точку  $O$ ), то получается тоже подобная фигура, но расположенная *обратно* относительно точки  $O$ .

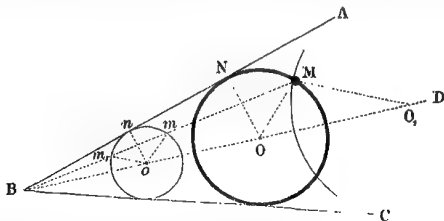
Замѣтимъ, что точка  $O$  въ этихъ случаяхъ наз. *центромъ подобія* фигуръ  $F$  и  $f$ , точки  $A$  и  $a, A_1$  и  $a_1$  и т. д. наз. *соответственными* точками, а прямыя  $OA, OA_1 \dots$  — *лучами подобія*.

**§. Методъ подобія.** Онъ состоитъ въ томъ, что, пользуясь нѣкоторыми данными задачи, строить сначала фигуру, *подобную* искомой, а затѣмъ переходить къ послѣдней. Этотъ методъ особенно удобенъ тогда, когда только одна данная величина есть длина, а всѣ прочія суть или углы, или отношенія линий; таковы, напр., задачи:

*Построить треугольникъ по данному углу, сторонамъ и отношенію двухъ другихъ сторонъ, или по двумъ угламъ и данной некоторой прямой (высотѣ, медианѣ, биссектрисѣ и т. д.);*

*Построить квадратъ по данной суммѣ или разности между діагональю и стороною; и т. п.*

Въ этихъ задачахъ положеніе искомой фигуры остается произвольнымъ; но во многихъ вопросахъ требуется построить фигуру, которой положеніе относительно данныхъ точекъ или линий вполнѣ определено. При этомъ можетъ случиться, что, отрывившись отъ какого-нибудь одного изъ условій положенія и оставивъ всѣ остальные, мы получимъ безчисленное множество фигуръ, *подобныхъ* искомой. Въ такомъ случаѣ методъ подобія можетъ быть употребленъ съ пользою. Приведемъ примѣръ.



Черт. 354

**Задача.** Въ данный уголъ  $ABC$  вписать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку  $M$  (черт. 354).

Отбрасывая на время требование, чтобы окружность проходила через точку  $M$ . Тогда вопросу будет удовлетворять бесчисленное множество окружностей, чьи центры лежат на биссектрисе  $BD$ . Построим одну из таких окружностей, напр. ту, чей центр есть  $o$ . Возьмем на ней точку  $m$ , *сходственную* точке  $M$ , т. е. лежащую на луче подобия  $MB$ , и проведем радиус  $mo$ . Если теперь построим  $MO \parallel mo$ , то точка  $O$  будет центром искомого круга. Действительно, проведя к сторонам  $AB$  перпендикуляры  $ON$  и  $on$ , мы получим подобные тр-ки  $MBO$  и  $mBo$ ,  $NBO$  и  $nBo$ , из которых будем иметь:

$$MO:mo=BO:Bo$$

$$NO:no=BO:Bo$$

$$\text{Откуда } MO:mo=NO:no$$

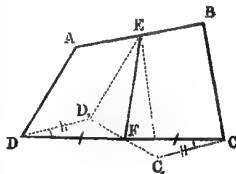
Но  $mo=no$ ; слѣд. и  $MO=NO$ , т. е. окружность, описанная из центра  $O$  радиусом  $OM$ , будет касаться стороны  $AB$ ; а такъ какъ ея центръ лежитъ на биссектрисе угла, то она касается и стороны  $BC$ .

Если на сходственную точку возьмемъ другую точку  $m_1$  пересѣченія луча  $BM$  съ окружностью  $o$ , то найдемъ другой центръ  $O_1$  искомого круга. Слѣд., задача допускаетъ два рѣшенія.

**3. Методъ параллельнаго перенесенія.** Чрезвычайно часто бываетъ полезно перечислить нѣкоторыя части данной или искомой фигуры въ другое положеніе, при которомъ легче обнаружить зависимость между данными элементами и искомыми. Существуютъ различные приемы такого перемѣщенія. Разсмотримъ сначала *параллельное перенесеніе*.

**Задача.** Построить четырехугольникъ  $ABCD$ , зная всѣ ея стороны и прямую  $EF$ , соединяющую середины противоположныхъ сторонъ  $AB$  и  $CD$ .

Чтобы сблизить между собою данныя линіи, перенесемъ параллельно самимъ себѣ стороны  $AD$  и  $BC$  въ положенія  $ED_1$  и  $EC_1$ . Тогда прямая  $DD_1$  будетъ равна и параллельна  $AE$ , а прямая  $CC_1$  равна и параллельна  $EB$ ; но такъ какъ  $AE=EB$ , то  $DD_1=CC_1$  и  $DD_1 \parallel CC_1$ . Вслѣдствіе этого тр-ки  $DD_1F$  и  $CC_1F$  будутъ равны (такъ какъ у нихъ:  $DD_1=CC_1$ ,  $DF=CF$  и  $\angle D_1DF=\angle FCC_1$ ); значить,  $\angle D_1FD=\angle CFC_1$ , и потому линія  $D_1FC_1$  должна быть



Черт. 355

прямой, т. е. фигура  $ED_1FC_1$  окажется треугольникомъ. Въ этомъ тр-кѣ известны двѣ стороны ( $ED_1=AD$  и  $EC_1=BC$ ) и медиана  $EF$ , проведенная къ третьей сторонѣ. По этимъ даннымъ легко построить тр-къ (если продолжимъ медиану  $EF$  за точку  $F$  на длину, равную ей, и полученную точку соединимъ съ  $D_1$  и  $C_1$ , то получимъ параллелограммъ, у котораго известны стороны и одна діагональ).

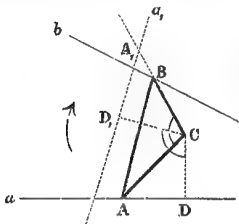
Найдя  $\triangle ED_1C_1$ , строим затем тр.-ки  $D_1DF$  и  $C_1CF$ , а затем и весь четырехугольник  $ABCD$ .

Заметим, что иногда бывает полезно перенести параллельно данному направлению фигуру, напр.: окружность. В этом случае все точки перемещаемой фигуры описывают параллельные и равные прямые (см., напр., задачу 383).

**4. Метод вращения вокруг точки.** Для уяснения этого особого вида перенесения приведем следующий пример:

**Задача.** Даны по положению точка  $C$  и две неопределенные прямые  $a$  и  $b$ . Построить треугольник  $ABC$ , которого одна вершина была бы в  $C$ , а две другие лежали бы на прямых  $a$  и  $b$ , и который кроме того был бы подобен данному треугольнику (по помещенному на чертеже).

Пусть задача решена. Замечая, что углы искомого тр.-ка даны, обозначим один из них, который находится при точке  $C$ , через  $\omega$ . Повернем всю фигуру вокруг точки  $C$  в направлении, указанном стрелкою, на угол  $\omega$  и найдем положение, которое займет после вращения прямая  $a$ . Для этого достаточно опустить на  $a$  перпендикуляр  $CD$ , затем повернуть его на угол  $\omega$  в положении  $CD_1$  и провести через  $D_1$  прямую  $a_1$ , перпендикулярную к  $CD_1$ . Прямая  $a_1$  и будет то положение, которое займет после вращения прямая  $a$ . Так как при вращении все части фигуры поворачиваются на один и тот же угол,



Черт. 356

то  $CA$ , после вращения, пойдет по  $CB$ ; вследствие этого точка  $A$  упадет в  $A_1$ , т. е. в точку пересечения  $CB$  с  $a_1$ . Так как отношение  $CA$  к  $CB$ , или все равно, отношение  $CA_1$  к  $CB$ , дано (пусть это будет  $m : n$ ), то теперь вопрос сводится к тому, чтобы через точку  $C$  провести такую прямую  $CA_1$ , которая пересеклась бы с прямой  $b$  и  $a_1$  в точках  $B$  и  $A_1$ , удовлетворяющих пропорции:

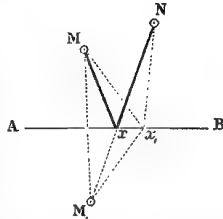
$$CA_1 : CB = m : n$$

Чтобы провести такую прямую, достаточно разделить  $CD_1$  на части в отношении  $m : n$  и через точку деления провести прямую параллельную  $a_1$ ; пересечение этой прямой с  $b$  определит точку  $B$ .

**5. Метод вращения вокруг прямой** (или метод симметрии). Иногда прием построения легко обнаруживается, если перевернем часть чертежа вокруг некоторой прямой так, чтобы эта часть заняла симметричное положение по другую сторону от этой прямой. Приведем пример.

**Задача.** На неопределенной прямой  $AB$  найти такую точку  $x$ , чтобы сумма ее расстояний от данных точек  $M$  и  $N$  была наименьшая.

Если, перегнув чертеж вокруг  $AB$ , приведем точку  $M$  в симметричное относительно  $AB$  положение  $M_1$ , то расстояния точки  $M$  от какой угодно точки прямой  $AB$  окажется равным расстоянию точки  $M_1$  от той же точки прямой  $AB$ . Поэтому суммы  $Mx + xN$ ,  $M_1x + xN$ ... равны соответственно суммам  $M_1x + xN$ ,  $M_1x_1 + x_1N$ ...; но из последних сумм наименьшая будет та, при которой линия  $M_1xN$  окажется прямою. Отсюда становится ясным прием построения.



Черт. 357

То же самое построение решает и другую задачу: на прямой  $AB$  найти такую точку  $x$ , чтобы прямая  $xM$  и  $xN$ , проведенная от нея к данным точкам  $M$  и  $N$ , составляли с  $AB$  равные углы.

**В. Метод обратности.** Иногда бывает полезно, так сказать, перевернуть задачу, т.-е. данные условия задачи взять за искомыми и наоборот. Приемством служить следующая задача.

**Задача.** В данный треугольник  $ABC$  вписать другой треугольник, у которого стороны были бы параллельны сторонам другого данного треугольника  $MNP$ .

Провернем вопрос: опишем около тр.-ка  $MNP$  другой тр.-ка  $A_1B_1C_1$ , у которого стороны были бы параллельны сторонам тр.-ка  $ABC$  (что, конечно, легко выполнить). Тогда мы получим фигуру, подобную искомой; разделив затем какую-нибудь сторону тр.-ка  $ABC$  на две части, пропорциональные отрезкам сходственной стороны т.-ка  $A_1B_1C_1$ , мы получим одну из вершин искомого тр.-ка.

## Примеры задач, решаемых этими методами.

### 10. Метод геометрических мест.

367. Построить четырехугольник  $ABCD$ , около которого можно было бы описать окружность, зная его стороны  $AB$  и  $BC$ , диагональ  $AC$  и угол между диагоналями.

368. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме или разности квадратов двух других сторон (напр., основание  $b$ , угол при вершине  $A$ , и сумма квадратов боковых сторон  $k^2$ ).

369. Около равностороннего треугольника описать квадрат так, чтобы обе фигуры имели общую вершину.

370. Найти точку, из которой три отрезка данной прямой:  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  были бы видны под равными углами.

371. Внутри тр.-ка найти такую точку, которой расстояния до сторонъ тр.-ка относились бы между собою, какъ 6:3:2.

372. Найти точку изъ которой три данные круга были бы видны подъ равными углами (*указаніе*: надо сначала найти геометр. мѣсто точекъ, изъ которыхъ два данные круга видны подъ равными углами).

373. Дана окружность и какія-нибудь двѣ прямыя. Найти на окружности такую точку, чтобы сумма ея расстояній отъ этихъ прямыхъ была наименьшая.

374. Превратить данный тр.-къ въ равновеликій другой тр.-къ съ данными основаніемъ и съ даннымъ угломъ при вершинѣ.

375. Въ данной окружности провести двѣ хорды данной длины такъ, чтобы онѣ пересѣкались подъ даннымъ угломъ и одна изъ нихъ проходила черезъ данную точку.

## 2°. Методъ подобія.

376. Построить тр.-къ по углу при вершинѣ, высотѣ и отношенію отрезковъ, на которыя основаніе дѣлится высотой.

377. Вписать квадратъ въ данный тр.-къ, въ данный секторъ, въ данный сегментъ.

378. Черезъ данную точку провести прямую такимъ образомъ, чтобы три данные прямыя, исходящія изъ одной точки, отсѣкали отъ некоей прямой отрезки, находящіеся въ данномъ отношеніи.

379. Черезъ данную точку  $A$  окружности провести хорду  $AD$ , которая пересѣкалась бы съ данною хордою  $BC$  въ такой точкѣ  $E$ , чтобы прямыя  $DE$  и  $DC$  находились въ данномъ отношеніи.

380. Провести внутри тр.-ка прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы эта прямая была средней пропорціональною между отрезками одной боковой стороны.

381. Построить равнобедренный тр.-къ, зная его боковую сторону и сумму высоты съ основаніемъ.

382. На данной прямой найти такую точку, чтобы ея расстоянія отъ данной точки и другой данной прямой находились въ данномъ отношеніи.

## 3°. Методъ параллельнаго перенесенія.

383. Между двумя данными окружностями, провести прямую данной длины  $a$  параллельно данной прямой  $MN$ .

(*Указаніе*: Надо одинъ кругъ приблизить къ другому, перенося его параллельно прямой  $MN$  на разстояніе  $a$ ).

384. Въ кругѣ даны двѣ хорды  $AB$  и  $CD$ . Найти на окружности такую точку  $x$ , чтобы прямыя  $xA$  и  $xB$  отсѣкали отъ хорды  $CD$  отрезокъ, равный данной длинѣ (мет. парал. пересѣченія и геом. мѣстъ).

385. Въ данномъ тр.-кѣ  $ABC$  найти такія точки:  $x$  на сторонѣ  $AB$  и  $y$  на сторонѣ  $BC$ , чтобы прямая  $xy$  была данной длины и кромѣ того отношеніе  $Ax : Cy$  было бы данное (парал. перенесеніе и методъ подобія).

386. Построить трапецію по одному ся углу, двумъ діагоналямъ и средней линіи.

387. Построить четырехугольникъ по тремъ сторонамъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  и двумъ угламъ  $\alpha$  и  $\pi$ , прилежащимъ къ неизвѣстной сторонѣ.

388. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести общую сѣкущую, параллельную данной прямой такъ, чтобы сумма или разность хордъ, определяемыхъ точками переносенія, была равна данной длинѣ.

389. Съ корабля видны два маяка, положеніе которыхъ на картѣ извѣстно, подъ даннымъ угломъ. Когда корабль пройдетъ извѣстную длину въ данномъ направленіи, тѣ же самые маяки видны подъ другимъ даннымъ угломъ. Определить на картѣ мѣсто корабля (геом. мѣсто и параллельное переносеніе).

#### 40. Методъ вращенія вокругъ точки.

390. Построить тр.-къ, подобный данному тр.-ку, такъ, чтобы одна его вершина лежала въ данной точкѣ  $A$ , а двѣ другія вершины находились бы на данныхъ окружностяхъ  $O$  и  $O_1$  (одна на  $O$ , другая на  $O_1$ ).

391. Данъ кругъ и внѣ его двѣ точки  $A$  и  $B$ ; провести къ кругу касательную такъ, чтобы разстоянія точки  $A$  до этой касательной и до перпендикуляра, опущеннаго изъ  $B$  на касательную, были въ данномъ отношеніи.

(Указаніе: надо повернуть вокругъ точки  $A$  на  $90^\circ$  прямоугольный т.-къ, у котораго гипотенуза есть  $AB$ , а одинъ катетъ—разстояніе точки  $A$  до перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ точки  $B$ . Эту же задачу можно рѣшить при помощи одновременнаго пользованія методомъ подобія и методомъ геометр. мѣстъ).

392. Построить тр.-къ, котораго стороны были бы пропорціональнымъ числамъ 3, 4 и 5, и котораго вершины лежали бы на трехъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ.

#### 50. Методъ вращенія вокругъ прямой.

393. Построить по четыремъ сторонамъ четырехугольникъ  $ABCD$ , зная, что его діагональ  $AC$  дѣлитъ уголъ  $A$  пополамъ.

394. Конечная прямая  $AB$  пересѣчена въ точкѣ  $C$  прямой  $MN$ ; найти на  $MN$  такую точку, изъ которой отрѣзки  $AC$  и  $CB$  видны подъ равными углами (эту задачу можно также рѣшить методомъ геометр. мѣстъ).

395. Построить квадратъ, двѣ противоположныя вершины котораго находились бы на двухъ данныхъ окружностяхъ, и двѣ другія на данной прямой, расположенной между окружностями.

396. На прямоугольномъ бильярдѣ дано положеніе двухъ шаровъ  $A$  и  $B$ . Въ какомъ направленіи надо толкнуть шаръ  $A$ , чтобы онъ, отразившись послѣдовательно отъ всѣхъ четырехъ бортовъ, ударилъ затѣмъ шаръ  $B$ .

397. Данъ уголь и внутри его точка. Построить тр.-къ наименьшаго периметра такой, чтобы одна его вершина лежала въ данной точкѣ, а двѣ другія на сторонахъ угла.

398. Рѣшить методомъ симметріи задачу, которая выше была рѣшена методомъ подобія: въ данный уголь вписать окружность, которая проходила бы черезъ точку, данную внутри угла.

6°. *Методъ обратности.*

399. Въ данный секторъ вписать тр.-къ, равный данному тр.-ку.

400. Построить тр.-къ, равный данному тр.-ку, такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ данныхъ прямыхъ, исходящихъ изъ одной точки.

401. Построить тр.-къ, подобный данному тр.-ку, такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ данныхъ концентрическихъ окружностяхъ.

402. Въ данный тр.-къ вписать тр.-къ, подобный данному тр.-ку, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ лежала въ точкѣ, данной на основаніи.





## О Г Л А В Л Е Н І Е.

---

Цыфры означаютъ номера страницъ.

*Предисловіе, I-VI.*

**Введеніе.** Математическія предложенія, 1—Прямая линія, плоскость. Понятіе о геометріи, 3.

## П Л А Н И М Е Т Р І Я.

---

### КНИГА I. ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

**Глава I. Углы.** Предварительныя понятія, 8—Свойства прямого угла. 10. Свойства смежныхъ и вертикальныхъ угловъ, 13.

**Глава II. Треугольники и многоугольники.** Понятіе о многоугольникахъ и треугольникахъ, 18.—Свойства равнобедреннаго треугольника, 21.—Признаки равенства треугольниковъ, 22.—Соотношеніе между углами и сторонами треугольника, 25.—Сравнительная длина заключающихся и заключаемыхъ ломаныхъ линій, 28.—Треугольники съ двумя соответственно равными сторонами, 31.

**Глава III. Перпендикуляры и наклонныя,** 32. -- Равенство прямоугольныхъ треугольниковъ,—34.

**Глава IV. Свойства перпендикуляра къ срединѣ прямой и биссектриссы угла,** 35.

**Глава V. Основныя задачи на построеніе,** 37.

*Упраженія,* 43.

**Глава VI. Параллельныя прямыя.** Основныя теоремы, 44.—Углы съ соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами, 50.—Сумма угловъ треугольника и многоугольника, 52.

**Глава VII. Параллелограммы и трапеціи.** Главнѣйшія свойства параллелограммовъ, 54.—Нѣкоторыя теоремы, основанныя на свойствахъ параллелограмма, 58.

*Упраженія,* 61.

---

## КНИГА II. ОКРУЖНОСТЬ.

Глава I. Форма и положеніе окружности, 64.

Глава II. Равенство и неравенство дугъ, 67.

Глава III. Зависимость между дугами, хордами и разстояніемъ хордъ отъ центра, 69.

Глава IV. Свойства касательной, 71.—Основныя задачи на проведеніе касательной, 73.

Глава V. Относительное положеніе окружностей, 76.

*Упраженія, 80.*

Глава VI. Измѣреніе величинъ, 83.

Глава VII. Измѣреніе угловъ помощью дугъ, 91.

Глава VIII. Вписанные и описанные многоугольники, 101.

Глава IX. Четыре замѣчательныя точки въ треугольникѣ, 105.

*Упраженія, 106.*

## КНИГА III. ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ.

Глава I. Подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ, 109.

Глава II. Нѣкоторыя теоремы о пропорціональныхъ линіяхъ, 119.

Глава III. Числовыя зависимости между элементами треугольника и нѣкоторыхъ другихъ фигуръ, 126.

Глава IV. Понятіе о приложеніи алгебры къ геометріи, 137.

*Упраженія, 142.*

Глава V. Правильные многоугольники, 146.

*Упраженія, 157.*

## КНИГА IV. ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЯ ЧАСТЕЙ.

Глава I. Основныя свойства предѣловъ, 158.

Глава II. Вычисленіе длины окружности, 163.

*Упраженія, 174.*

---

## КНИГА V. ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

Глава I. Площади многоугольниковъ, 174.

Глава II. Теорема Пифагора и основанныя на ней задачи, 183.

Глава III. Отношеніе площадей подобныхъ фигуръ, 185.

Глава IV. Площадь круга и его частей, 188.

Глава V. Соотношеніе между сторонами треугольника и радіусами вписаннаго и описаннаго круговъ, 193.

*Упраженія*, 195.

Числовыя задачи на разные отдѣлы планиметріи, 197.

## СТЕРЕОМЕТРИЯ.

### КНИГА I. ПРЯМЫЯ И ПЛОСКОСТИ.

Глава I. Опредѣленіе положенія плоскости, 199.

Глава II. Перпендикуляръ и наклонныя, 203.

Глава III. Параллельныя прямыя и плоскости. Параллельныя прямыя, 207.—Прямая, параллельная плоскости, 210. — Параллельныя плоскости, 212.

Глава IV. Двугранные углы, 215. — Перпендикулярныя плоскости, 219.—Уголъ двухъ пересекающихся прямыхъ, 220.—Уголъ прямой съ плоскостью, 221.

Глава V. Многогранные углы, 221.—Равенство гранныхъ угловъ, 224.

### КНИГА II. МНОГОГРАННИКИ.

Глава I. Свойства параллелоипеда и пирамиды. Опредѣленія, 227.—Равенство призмъ и пирамидъ, 231.—Свойства граней и діагоналей параллелоипеда,—232. Свойства параллельныхъ сѣченій тѣ пирамидъ, 233.

Глава II. Боковая поверхность призмы и параллелоипеда, 235.  
*Задачи*,—237.

Глава III. Объемъ призмы и параллелоипеда. Опредѣленія, 238.—Объемъ призматическаго параллелоипеда, 238. — Объемъ призмы, 243.—Объемъ пирамиды, 245.—Объемъ усѣченной пирамиды и призмы, 249.

Глава IV. Подобіе многогранниковъ, 252.

Глава V. Симметричныя многогранники, 256.

Глава VI. Понятіе о правильныхъ многогранникахъ, 260.—*Задачи*, 262.

### КНИГА III. КРУГЛЫЯ ТѢЛА.

**Глава I. Цилиндръ и конусъ** Опредѣленія, 263.—Поверхность цилиндра и конуса, 266.—Объемъ цилиндра и конуса, 271.—Подобіе цилиндровъ и конусовъ, 273.

**Глава II. Шаръ.** Ученіе шара и плоскостью, 274.—Свойства большихъ круговъ, 276.—Плоскость, касательная къ шару, 278.—Поверхность шара и его частей, 278. Объемъ шара и его частей, 282.

*Задачи*, 268.

**Приложеніе:** Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе, 289.

### ЗАМѢЧЕЛНЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр. 8, строка 6 снизу, напечатано: *какія-нибудь*; слѣдуетъ: *какімъ-нибудь*.

Стр. 15, строка 3, напечатано:  $AOB + BOD + 2d$ ; слѣдуетъ:  $AOB + BOD = 2d$ .

Стр. 52, строка 1, напечатано: *мно прямые*; слѣдуетъ: *они прямые*.

Стр. 57, строка 14 снизу, напеч.: *такъ у нихъ*; слѣдуетъ: *такъ какъ у нихъ*.

Стр. 126, напечатано: **Теорема.** *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между гипотенузой и прилежащимъ отрезкомъ.*

Слѣдуетъ: **Теорема.** *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между отрезками гипотенузы, а каждый катетъ есть средняя пропорціональная между гипотенузой и прилежащимъ отрезкомъ.*

Стр. 131, строка 6 снизу, напечатано:  $a=5, c=8$ ; слѣдуетъ:  $a=5, b=4, c=8$ .

Стр. 146, напечатано: глава IV; слѣдуетъ: глава V.

Стр. 150, строка 5, напечатано: *съ бисектрисой*; слѣдуетъ: *съ бисектрисой*.

Стр. 155, строка 9 снизу, напечатано: R 2; слѣдуетъ: 2 R.

ШКОЛЬНЫЕ УЧЕБНИКИ СССР

[SHEBA.SPB.RU/SHKOLA](http://SHEBA.SPB.RU/SHKOLA)